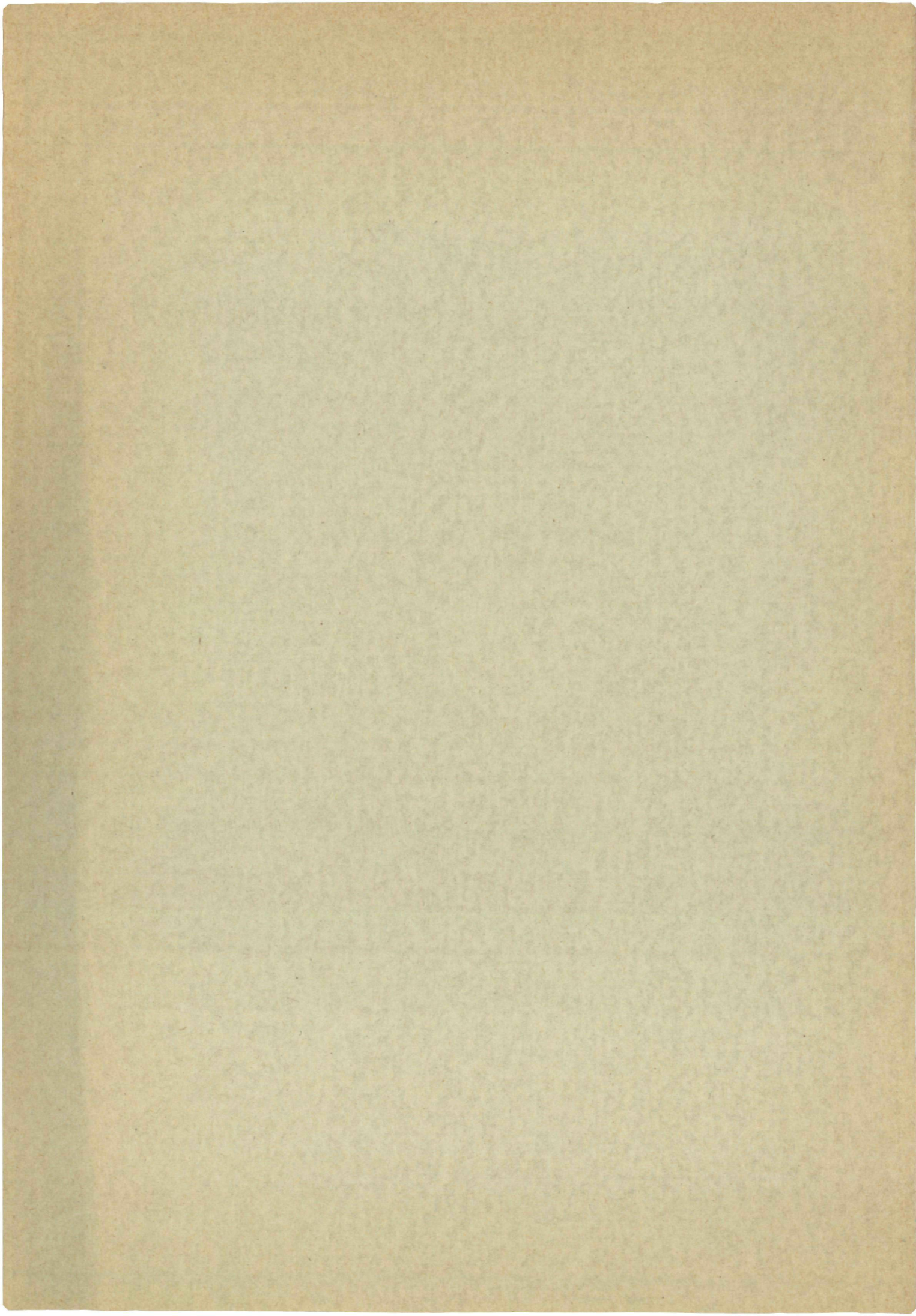


1684

**DUBBEL RESONANTIE
PRODUCTIE IN
5 GeV/c π^+ p REACTIES**

C. L. A. Pols



DUBBEL RESONANTIE PRODUCTIE IN 5 GeV/c π^+p REACTIES

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE
WISKUNDE EN NATUURWETENSCHAPPEN
AAN DE KATHOLIEKE UNIVERSITEIT TE NIJMEGEN, OP GEZAG VAN
DE RECTOR MAGNIFICUS DR. G. BRENNINKMEIJER,
HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER SOCIALE WETENSCHAPPEN,
VOLGENS BESLUIT VAN DE SENAAT
IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN
OP WOENSDAG 7 JUNI 1972,
DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

door

CAROLUS LUDOVICUS ANTONIUS POLS
geboren te Capelle a/d IJssel

Dankbetuiging.

Ik ben dank verschuldigd aan de staf van het CERN PS, de staf van het B.N.H.B.C. bellenvat, de scansters en de medewerkers van de rekencentra in de verschillende laboratoria. Ik wens alle collaboratie medewerkers te bedanken voor hun bijdragen en in het bijzonder van onze groep Dr.Ir. D.J. Schotanus en Drs. D.Z. Toet.

Een aantal discussies met Drs. M.J. Holwerda en seminaria van Prof.Dr. J.J.J. Kokkedee zijn voor mij bijzonder leerzaam geweest. Ik dank Mej. I. Vernooy en Drs. H. Tiecke voor de vele moeiten die zij zich getroost hebben bij het oplossen van diverse communicatie problemen. Tenslotte dank ik de tekenafdeling van de Faculteit voor het, veelal ondankbare werk verbonden aan het bijwerken van machinaal vervaardigde tekeningen en de offset-afdeling voor het typen en drukken van dit proefschrift.

Aan mijn ouders

Inhoud

	blz.
Inleiding	1
I. Experimentele Bijzonderheden	4
I.a. Samenstelling v.d. Steekproeven van kanaal (A) en (B)	4
I.b. Bepaling van het Millibarn-equivalent	9
II. Werkzame Doorsnede van Enkelvoudige- en Dubbele Reso-	
nantie Productie	14
II.a. Inleiding	14
II.b. Het 4C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$	17
II.c. Bepaling van de $\Delta^{++} \rho^0$ en $\Delta^{++} f^0$ Werkzame Doorsnede	19
II.d. Bepaling van de Totale ρ^0 en Δ^{++} Productie	34
II.e. Het 1C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$	39
II.f. Totale Δ^{++} , ω^0 en η^0 Werkzame Doorsnede	47
III. Verband tussen Spin toestand en Vervalshoekverdeling	51
III.a. Assenstelsel	51
III.b. De Vervalshoekverdeling uitgedrukt in de Elementen van de gecombineerde Spin-dichtheidsmatrix	54
III.c. De Vervalshoekverdeling uitgedrukt in Statistische Tensoren	61
III.d. Enkelvoudige Vervalshoekverdeling uitgedrukt in Donohue-Högaasen Parameters	65
IV. Differentiële Werkzame Doorsnede en Vervalshoekverdeling van de quasi twee deeltjes Reacties	69
IV.a. Het 4C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$	69
IV.b. De Reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$	78
IV.c. De Reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f^0$	87
IV.d. Het 1C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$	88
IV.e. De Reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$	89
IV.f. De Reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$	90

	blz.
V. Uitwisselingsmodellen voor quasi twee deeltjes Reacties	95
V.a. Eén-meson Uitwisselingsmodel met Absorptie	95
V.b. Quantum Getallen van de Uitgewisselde Mesonen	99
V.c. Vergelijking van de Absorptiemodel voorspellingen met het Experiment	100
V.d. Conclusies	108
V.e. Enkelvoudige Reggepool modellen	109
V.f. Minima in de Differentiële Werkzame Doorsnede	115
V.g. Bijdragen van Natuurlijke en Niet-Natuurlijke Pariteitsuitwisseling	116
V.h. Bespreking van de Experimentele Resultaten	117
V.i. Moeilijkheden bij het vergelijken van berekende en gemeten Werkzame Doorsnede bij Resonantie Productie	126
VI. Vergelijking met de Voorspellingen van het Quark-model	130
VI.a. Ontwikkeling van het Quark-model	130
VI.b. Definitie van het Quark-model	131
VI.c. Relatie tussen Deeltjes- en Quark-Verstrooiings- amplituden	132
VI.d. Spin Referentie Systemen voor de Quark-Quark Ver- strooiing	134
VI.e. Relaties tussen de Statistische Tensoren	137
VI.f. Onderzoek naar de Geldigheid van het Quark-model	140
VI.g. Kinematische Restricties	154
VI.h. Conclusie	156
Summary	158
Samenvatting	160
Appendices	162

Inleiding

Het 5 GeV/c π^+p experiment heeft in 1965 een aanvang genomen door een secundaire bundel π^+ mesonen van het CERN-proton synchroton met een impuls van $(4,987 \pm 0,010)$ GeV/c in te laten vallen op een bellenvat gevuld met vloeibaar waterstof. Het gebruikte bellenvat is de 150 cm lange "British National Hydrogen Bubble Chamber". De hierbij ontstane interacties zijn in ongeveer 125000 opnamen fotografisch vastgelegd.

Bij deze energie komen naast reacties met hogere multipliciteit ook (zg. quasi) twee- en drie-deeltjes reacties voor. Allereerst zijn de verschijnselen geanalyseerd met 6 geladen deeltjes in de eindtoestand. Deze bevatten voornamelijk informatie omtrent reacties met hogere multipliciteit⁽¹⁾. Vervolgens zijn de verschijnselen met 4 of 2 geladen deeltjes in de eindtoestand bestudeerd, waarbij de aandacht voornamelijk naar (quasi) twee- of drie-deeltjes reacties uitging. Met uitzondering van de publicaties welke betrekking hadden op de vervalswijzen, spin-pariteit en opsplitsing van het A_2 -meson⁽²⁾ en op het voorkomen van een $N^*(1700)$ resonantie⁽³⁾, zijn vooral de productie mechanismen welke ten grondslag liggen aan de (quasi) drie-deeltjes reacties⁽⁴⁾ en (quasi) twee-deeltjes reacties^(5,6,7,8) onderzocht en gepubliceerd. De uitvoering en analyse van dit experiment is verricht door een collaboratie, waarin werd deelgenomen door instituten uit Bonn, Durham, Nijmegen, Parijs (Ecole Polytechnique) en Turijn. Door Nijmegen is o.m. de studie verricht van de quasi twee deeltjes reacties met dubbele resonantie productie, waarbij de resonanties rechtstreeks naar een stabiele eindtoestand vervallen. Deze studie vormt het onderwerp van dit proef-

schrift. De genoemde reacties worden waargenomen in de verschijnenselen met vier geladen deeltjes in de eindtoestand en wel:

$$\pi^+ p \rightarrow \begin{array}{ccc} \Delta^{++} & & \rho^0 \quad (\text{of } f^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p \pi^+ & & \pi^+ \pi^- \end{array}$$

in het kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$ (A)

$$\text{en } \pi^+ p \rightarrow \begin{array}{ccc} \Delta^{++} & & \omega^0 \quad (\text{of } \eta^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p \pi^+ & & \pi^+ \pi^- \pi^0 \end{array}$$

in het kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$ (B)

Referenties.

- (1) Bonn - Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Torino collaboratie, H. Drevermann et al., Phys. Rev. 161 (1967), 1356.
- (2) Bonn - Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Torino collaboratie, K. Böckmann et al., Nuclear Physics B16 (1970), 221.
- (3) Bonn - Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Torino collaboratie, E. Cirba et al., Nuclear Physics B23 (1970), 533.
- (4) Bonn - Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Torino collaboratie, G. Rinaudo et al., Nuclear Physics B25 (1971), 351.
- (5) Bonn - Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Strasbourg - Torino collaboratie, K. Böckmann et al., Nuclear Physics B7 (1968), 681.
- (6) Bonn - Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Strasbourg - Torino collaboratie, K. Böckmann et al., Physics Letters 28B (1968), 72.
- (7) Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Torino collaboratie, D.J. Schotanus et al., Nuclear Physics B22 (1970), 45.
- (8) Bonn - Durham - Nijmegen - Paris (E.P.) - Torino collaboratie, C.L. Pols et al., Nuclear Physics B25 (1971), 109.

I. Experimentele Bijzonderheden.

Daar het onderwerp van dit hoofdstuk uitgebreid is behandeld in de dissertatie van D.J. Schotanus⁽¹⁾ beperken wij ons tot die aspecten, welke in direct verband staan met ons onderzoek. Deze zijn met name de zuiverheid van de door ons gebruikte steekproeven van kanaal (A) en (B) en het zg. millibarn equivalent van de daarin vervatte verschijnselen.

I.a. Samenstelling van de steekproeven van kanaal (A) en (B).

In twee onafhankelijk uitgevoerde "scans" zijn de foto's onderzocht op het voorkomen van diverse soorten interacties, waarbij slechts een beperkt gedeelte van de foto, het zg. "fiducial volume", in ogenschouw werd genomen. Hierbij werden de gevonden verschijnselen verdeeld in fenomenologische categorieën als 2-, 4- of 6-poot verschijnselen naar gelang het aantal zichtbare uitgaande sporen. Bovendien werd nog vermeld of een spoor een knik vertoonde of dat een V^0 (d.w.z. twee sporen van tegengestelde geladen deeltjes waarvan het gemeenschappelijk beginpunt niet met een interactie punt is verbonden) met de interactie geassocieerd kon worden.

Van de zo gevonden 4-poot verschijnselen zijn slechts degene gemeten, die geacht werden goed meetbaar te zijn. Beperkingen inzake meetbaarheid kunnen van algemene aard zijn (slechte belichting of ontwikkeling van de film, te hoge bundel intensiteit etc.) of individueel (b.v. doordat een van de uitgaande deeltjes op korte afstand van het productie punt verstrooid wordt). Omdat de eerste groep van oorzaken onafhankelijk is van de aard van de verschijnselen en de tweede

groep, binnen eenzelfde fenomenologische categorie, praktisch onafhankelijk hiervan is, wordt door deze procedure geen systematische fout geïntroduceerd.

De geselecteerde verschijnselen zijn op ENETRA-meettoestellen gemeten en vervolgens met het programma THRESH⁽²⁾ ruimtelijk gereconstrueerd. Aan de hand van deze ruimtelijke reconstructie zijn met behulp van het programma GRIND⁽²⁾ verschillende hypothesen omtrent de aard der uitgaande deeltjes getest en hun impulsen bepaald.

In de programma's THRESH en GRIND wordt de nauwkeurigheid van de meting gecontrôleerd. Indien niet aan voorafgestelde criteria werd voldaan, is tot hermeting besloten. Verschijnselen die na drie metingen geen goede resultaten opleverden zijn als onmeetbaar beschouwd. In totaal zijn 26242 4-poot verschijnselen goed gemeten.

De in GRIND ingevoerde hypothesen voor 4-poot verschijnselen zonder V^0 of knik vallen in twee categorieën uiteen:

- 1) Er is geen neutraal deeltje geproduceerd. De geladen deeltjes zijn proton, K^\pm mesonen en/of π^\pm mesonen, overeenkomstig de reacties:

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad (\text{kanaal A})$$

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ K^+ K^-$$

- 2) Er is één neutraal deeltje geproduceerd: π^0 meson of neutron. De geladen deeltjes zijn een proton en/of π^\pm mesonen, overeenkomstig de reacties:

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad (\text{kanaal B})$$

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^+ \pi^- n$$

De hypothesen waarbij het neutrale deeltje een γ , K^0 , Λ^0 of Σ^0 is, zijn niet in aanmerking genomen omdat hun bijdrage klein is. Met een kleinste kwadraten aanpassing van de impulsen van de

deeltjes, waarbij de behoudswetten van impuls en energie worden ingevoerd, wordt nagegaan of een verschijnsel aan een van de bovenstaande hypothesen voldoet en wordt de χ^2 van de aanpassing bepaald. Voor de hypothesen van de eerste categorie moeten de gemeten grootheden 4 nevenvoorwaarden ("constraints") vervullen. Deze hypothesen worden daarom als 4C-FITS aangeduid. Wanneer de χ^2 van de aanpassing groter dan 20 was (betrouwbaarheid kleiner dan 0,05%), werd het verschijnsel geacht niet aan de betreffende hypothese te voldoen. Bij de hypothesen van de tweede categorie, waar drie van de vier nevenvoorwaarden gebruikt worden om de impuls van het neutrale deeltje te bepalen, behoeven de gemeten grootheden slechts aan één nevenvoorwaarden te voldoen. Deze hypothesen worden 1C-FITS genoemd. Was de χ^2 van de aanpassing groter dan 6 (betrouwbaarheid kleiner dan 1,5%), dan werd de hypothese niet aanvaard.

Het verschil in de gekozen betrouwbaarheidsniveaux voor 4C- en 1C-FITS berust op Monte-Carlo berekeningen. Hierbij is gebleken dat de kans dat een 1C-FIT verschijnsel aan een 4C-FIT hypothese voldoet veel kleiner is dan omgekeerd.

Uit de kinematisch aanvaardbare hypothesen tracht men de juiste te selecteren door de ionisatie van de sporen in rekening te brengen. In GRIND wordt berekend welke ionisatie men voor een spoor kan verwachten afhankelijk van de massa van het deeltje dat het spoor heeft veroorzaakt. Stemt de waargenomen ionisatie van de sporen overeen met de berekende dan wordt de hypothese als goed aanvaard. De kinematische restricties tesamen met de ionisatie geven niet in alle gevallen een eenduidig antwoord, zodat een verschijnsel aan meer hypothesen kan voldoen. De ambiguïteiten die hierdoor ontstaan

zijn, voor zover het hypothesen van verschillende categorieën betreft, opgelost door steeds de voorkeur te geven aan de 4C-FIT boven de 1C-FIT, op grond van bovengenoemde Monte-Carlo berekeningen. Verschijnselen die aan geen hypothese voldoen zijn als NO-FIT verschijnselen gequalificeerd.

Bij de bepaling van de werkzame doorsnede van de verschillende reactie kanalen is getracht te corrigeren voor verschijnselen welke op grond van bovenstaande criteria verkeerd zijn geïnterpreteerd⁽¹⁾.

De steekproeven van kanaal (A) en (B) zijn samengesteld uit de goed gemeten verschijnselen die aan één of meer 4C-FIT resp. 1C-FIT hypothesen voldoen.

Kanaal (A): $p\pi^+\pi^+\pi^-$

Alle verschijnselen die aan één of meer goede 4C-hypothesen van het type $p\pi^+\pi^+\pi^-$ voldoen zijn als zodanig aanvaard.

Omdat bij een impuls van 1,6 GeV/c of meer de ionisatie verschillen tussen protonen en π^+ mesonen niet waarneembaar zijn, kunnen meer goede hypothesen van het type $p\pi^+\pi^+\pi^-$ voorkomen, afhankelijk van de ligging van het proton (p/π^+ ambiguïteit). Deze ambiguïteit is min of meer arbitrair opgelost door de hypothese met de kleinste χ^2 te kiezen.

Ook komen verschijnselen voor die zowel aan de $p\pi^+\pi^+\pi^-$ als de $p\pi^+K^+K^-$ hypothese voldoen, omdat bij een impuls groter dan 0,9 GeV/c de ionisatie verschillen tussen K- en π -mesonen niet meer waarneembaar zijn (K/ π ambiguïteit). Bij deze ambiguïteit is steeds de $p\pi^+\pi^+\pi^-$ hypothese gekozen. Omdat het aantal K/ π ambiguïteiten gering is en de verhouding éénzijdige

$p\pi^+\pi^+\pi^-$ en $p\pi^+K^+K^-$ verschijnselen 20:1 is, wordt hierdoor in de $p\pi^+\pi^+\pi^-$ -steekproef slechts een geringe fout geïntroduceerd.

In tabel I.1. is een overzicht gegeven van de ambiguïteiten betreffende de door ons gebruikte verschijnselen uit kanaal (A).

Tabel I.1: Aantal éénduidige en ambigue verschijnselen in kanaal (A).

1 goede hypothese	2 goede hypothesen		3 goede hypothesen		totaal
	p/ π amb	K/ π amb	p/ π amb	K/ π amb	
6505	192	46	5	3	6751

Kanaal (B): $p\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$

De verschijnselen die tot dit kanaal bijdragen kunnen in twee groepen verdeeld worden al naar gelang de aard van de mogelijke ambiguïteiten:

- één of meer π^0 -hypothesen (mogelijke p/π^+ ambiguïteit).
- één of meer π^0 -hypothesen én de neutron hypothese (n/π^0 ambiguïteit).

Vanzelfsprekend is deze laatste ambiguïteit uiteindelijk ook een p/π^+ ambiguïteit, maar ze wordt om onderscheid te maken met de eerste n/π^0 ambiguïteit genoemd.

Alle verschijnselen uit de groep a) en die uit groep b) waarvan de π^0 -hypothese een kleinere χ^2 heeft dan de neutron hypothese, zijn als verschijnselen behorend tot kanaal (B) aanvaard, voor zover de "ontbrekende massa" (MM) voldoet aan:

$$-0,12 \leq MM^2 \leq 0,12 \quad \text{GeV}^2.$$

Het kwadraat van de "ontbrekende massa" is gedefinieerd als:

$$MM^2 = (E_i - E_f)^2 - (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 \quad (\text{I.1})$$

In deze formule stellen E en \vec{p} de som van de energieën en impulsen van de inkomende deeltjes (i) en de uitgaande deeltjes (f) voor.

Voor verschijnselen die aan meer goede π^0 -hypothesen voldoen is die met de kleinste χ^2 gekozen.

In Tabel I.2 zijn de ambiguïteiten betreffende de door ons gebruikte verschijnselen uit kanaal (B) samengevat.

Tabel I.2. Aantal éénduidige en ambigue verschijnselen uit kanaal (B).

1 goede hypothese	2 goede hypothesen		3 goede hypothesen		totaal
	p/π^+ amb	n/π^0 amb	p/π^+ amb	p/π^+ én n/π^0	
6475	451	235	16	33	7210

I.b. Bepaling van het millibarn-equivalent.

Om de werkzame doorsnede van een reactie te kunnen bepalen moet men het millibarn-equivalent (m.b.e.) kennen van de verschijnselen die tot de reactie bijdragen. Het m.b.e. is in principe voor elk verschijnsel gelijk, onafhankelijk van de topologie of het reactie kanaal waartoe het behoort, en wordt gedefinieerd als :

$$\text{m.b.e.} = \frac{\text{totale werkzame doorsnede}}{\text{aantal verschijnselen op de film}} = \frac{\sigma_T}{N_T}$$

Echter niet alle verschijnselen met een 4-poot topologie zijn goed gemeten en niet alle goed gemeten verschijnselen behoren tot kanaal (A) en (B) zijn, wegens de toegepaste selectie criteria, in de betreffende steekproef terecht gekomen. Het m.b.e. voor een verschijnsel behorende tot de steekproeven van kanaal (A) en (B) is dan gedefinieerd als:

$$(\text{m.b.e.})_s^i = \frac{\sigma_T}{N_T} \cdot \frac{N_{4,T}}{N_{4,m}} \cdot \frac{N_{4,m}^i}{N_s^i} \quad (i=A,B) \quad (\text{I.2})$$

Hierbij is $N_{4,T}$ = totaal aantal 4-poot verschijnselen.

$N_{4,m}$ = aantal goed gemeten 4-poot verschijnselen.

$N_{4,m}^i$ = aantal goed gemeten 4-poot verschijnselen behorende tot kanaal (i).

N_s^i = aantal verschijnselen in de gebruikte steekproef van kanaal (i).

Uit de compilatie van Giacomelli et al.⁽³⁾ is door interpolatie de totale werkzame doorsnede voor π^+p interacties bij een bundelimpuls van 4,987 GeV/c bepaald op $(26,6 \pm 0,3)$ mb. De verhouding $N_{4,T}/N_T$ is bepaald door 94 films (met gemiddeld 1200 foto's per film) tweemaal te scannen. De aantallen hierbij gevonden verschijnselen van de verschillende fenomenologische categorieën zijn in Tabel I.3 gegeven. Op deze aantallen is een correctie voor scanning verlies toegepast.

De aanduiding V betekent dat één of meer geladen of ongeladen vreemde deeltjes zijn waargenomen (knik of V^0).

Uit tabel I.3 volgt dat de verhouding $\frac{N_{4,T}}{N_T} = 0,387 \pm 0,004$.

Tabel I.3. Aantallen gevonden verschijnselen, gecorrigeerd voor scanning verliezen.

categorie	aantal
8-poot	93
6-poot	3854
4-poot	30428
4-poot V	690
2-poot	42027
2-poot V	1565
totaal	78657

Het totaal aantal goed gemeten 4-poot verschijnselen zonder zichtbare vreemde deeltjes is: $N_{4,m} = 26242$.

Het aantal gemeten verschijnselen behorende tot kanaal (i) ($N_{4,m}^i$) is bepaald door het aantal verschijnselen in de steekproef van kanaal (i) te corrigeren voor verschijnselen die ten onrechte uit de steekproef zijn weggelaten of daarin zijn opgenomen⁽¹⁾. De getallen $N_{4,m}^i$ en N_s^i zijn gegeven in Tabel I.4 tesamen met het millibarn equivalent en de werkzame doorsnede (σ_i) van dit kanaal.

Tabel I.4. De werkzame doorsnede voor kanaal (A) en (B) en het m.b.e. van de verschijnselen uit de steekproeven.

kanaal	$N_{4,m}^i$	N_s^i	$(m.b.e.)_s^i$	σ^i in mb
A $p\pi^+\pi^+\pi^-$	6994	6750	$(0,41 \pm 0,01)10^{-3}$	$2,74 \pm 0,07$
B $p\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$	7300	7210	$(0,40 \pm 0,01)10^{-3}$	$2,86 \pm 0,07$

Referenties.

- (1) D.J. Schotanus, Dissertatie, Nijmegen 1971.
- (2) Beschrijvingen van de programma's THRESH en GRIND zijn
gegeven in de CERN program library, long write-ups no:
X 201 THRESH
X 601 GRIND.
- (3) G. Giacomelli, P. Pini, S. Stagni, CERN-HERA 69-1 (1969).

II. Werkzame Doorsneden van Enkelvoudige en Dubbele Resonantie Productie.

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de resonantie productie in de kanalen (A) en (B). De nadruk ligt hierbij op de reacties met dubbele resonantie productie en de methoden waarmee de werkzame doorsneden van deze reacties bepaald zijn.

II.a. Inleiding.

In vele theoretische modellen zijn de werkzame doorsneden van reacties en hun afhankelijkheid van de bundel impuls belangrijke grootheden. Veelal moet men om het verband tussen werkzame doorsnede en bundel impuls te bepalen, de resultaten van verschillende bellenvat experimenten vergelijken^(1,2).

Een zorgvuldige bepaling van de werkzame doorsnede van reacties, waarbij systematische fouten zoveel mogelijk vermeden worden is dus belangrijk. Voor reacties met dubbele resonantie productie is de bepaling van de werkzame doorsnede een moeilijk probleem, in het bijzonder als de resonanties breed zijn (d.w.z. Γ in formule A.1 van Appendix 1 groter dan 100 MeV). Door het ontbreken van een éénduidige definitie van wat men onder de werkzame doorsnede van dubbel resonantie productie verstaat komen in de litteratuur verschillen van 50% in de opgegeven waarden voor. Zo zijn er twee $\pi^+ p$ experimenten gepubliceerd, welke verricht zijn bij praktisch gelijke bundel impuls nl. 2,08 en 1,95 GeV/c^(3,4). In beide experimenten heeft men ruim duizend verschijnselen in de eindtoestand $p\pi^+\pi^+\pi^-$. Uitgedrukt in percentages van dit aan-

tal vindt men voor de $\Delta^{++} \rho^0$ productie 29% en $(46 \pm 5)\%$.

Er bestaan verschillende methoden om de werkzame doorsnede van dubbel resonantie productie te bepalen. Om de gedachten te bepalen spitsen we de discussie toe op de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ in de eindtoestand $p \pi_1^+ \pi_2^+ \pi^-$. Men geeft de verschijnselen weer in een twee-dimensionaal diagram (Goldhaber plot) waarbij op de assen de effectieve massa van het $p \pi^+$ - en het $\pi^+ \pi^-$ systeem is uitgezet (fig. II.1^a). In deze figuur telt men alle verschijnselen waarvan de $p \pi^+$ massa in het Δ^{++} massa gebied^{*} en de $\pi^+ \pi^-$ massa in het ρ^0 massa gebied is gelegen. Dit aantal corrigeert men voor de achtergrond verschijnselen die meegeteld zijn en voor de $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen die buiten dit gebied zijn gelegen. De laatste correctie kan men berekenen uit de massa en de breedte van de resonanties. Het schatten van de achtergrond op een twee-dimensionale figuur is daarentegen moeilijk.

Soms stelt men dat de werkzame doorsnede gelijk is aan het aantal verschijnselen in een bij afspraak vastgesteld $\Delta^{++} \rho^0$ massa gebied^(2,5). Hierbij maakt men de al dan niet uitgesproken veronderstelling dat het aantal $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen buiten het massa gebied gelijk is aan de achtergrond in het massa gebied. De resultaten die men op deze wijze verkrijgt wijken sterk af van op andere wijze bepaalde werkzame doorsneden. Ook als eenvoudig hulpmiddel om bij afspraak een maat voor de werkzame doorsnede te hebben, en zo de energie afhankelijkheid van de werkzame doorsnede te bepalen, is deze

^{*}Voetnoot: Onder massa gebied verstaat men een massa interval gelegen rondom de nominale waarde van de massa van de resonantie. Een gebruikelijke waarde voor de breedte van het interval is $\approx \frac{3}{2} \Gamma$.

methode minder geschikt, omdat de verhouding van het aantal dubbel resonantie verschijnselen buiten en binnen het massa gebied (en het percentage achtergrond verschijnselen daarin) voor verschillende energieën niet constant is.

Voor een meer reële bepaling van de werkzame doorsnede moet men het percentage achtergrond in het $\Delta^{++} \rho^0$ gebied schatten. Een methode die toegepast wordt is dat men het schatten van de achtergrond in een twee-dimensionale figuur reduceert tot het meerdere malen schatten van de achtergrond in een één-dimensionale figuur, hetgeen eenvoudiger is. Men maakt een histogram van de $\pi_2^+ \pi^-$ massa verdeling voor die verschijnselen waarvan de $p\pi_1^+$ massa in het Δ^{++} massa gebied is gelegen. Men schat aan de hand van dit histogram het aantal ρ^0 verschijnselen geassocieerd met de verschijnselen in het Δ^{++} massa gebied. Men kan dit doen door een achtergrond curve te construeren en het aantal verschijnselen boven de achtergrond te tellen. Vervolgens kiest men een contrôle gebied om het Δ^{++} massa gebied gelegen en men verkrijgt op dezelfde wijze een schatting van het aantal ρ^0 verschijnselen geassocieerd met de achtergrond in het Δ^{++} massa gebied. Het verschil tussen beide uitkomsten is een maat voor de $\Delta^{++} \rho^0$ productie. Door een correctie aan te brengen voor het gedeelte van de Δ^{++} resonantie dat buiten het massa gebied is gelegen verkrijgt men een schatting van het totale aantal $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen. Vervolgens herhaalt men de gehele procedure op de $p\pi_1^+$ massa verdeling voor verschijnselen waarvan de $\pi_2^+ \pi^-$ massa in en om het ρ^0 massa gebied zijn gelegen, hetgeen een tweede schatting van de $\Delta^{++} \rho^0$ productie op levert^(6,7).

De moeilijkheid van deze methode is om bij brede resonanties contrôle gebieden te vinden die ver genoeg van de

resonanties verwijderd zijn om geen (of weinig, waarvoor men dan kan corrigeren) resonantie verschijnselen bevatten, maar die wel een goede afspiegeling zijn van de achtergrond in het resonantie gebied.

Men kan ook trachten de twee-dimensionale figuur of een gedeelte daarvan aan te passen met een verdelingsfunctie waarin het percentage $\Delta^{++} \rho^0$ productie als vrije parameter voorkomt. De verdelingsfunctie is een som van functies, die de bijdrage van de verschillende reacties tot de betreffende Goldhaber plot weergeven. Slaagt men erin de achtergrond, waartoe alle andere reacties bijdragen, op eenvoudige en toch voldoende nauwkeurige wijze te beschrijven dan is deze methode geschikt om de werkzame doorsnede van dubbel resonantie processen te bepalen. Zij is o.m. gebruikt om de werkzame doorsnede van de reacties $K^+ p \rightarrow \Delta K^{(8)}$ en $\bar{p} p \rightarrow \bar{\Delta}^{--} \Delta^{++(9)}$ te berekenen. De toepassing van deze methode op de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ en de complicaties die daarbij optreden, o.a. omdat elk verschijnsel twee bijdragen tot de Goldhaber levert, worden beschreven in par. II.c.

II.b. Het 4C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$.

Twee deeltjes reacties komen voor in de reacties met dubbel resonantie productie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ en $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f^0$, en in de reactie $\pi^+ p \rightarrow p A_2^{+(10,11)}$. Drie lichamen reacties zijn waargenomen bij $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \pi^+ \pi^-$ en $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \rho^0(12)$.

Omdat bij een zeer groot gedeelte van de verschijnselen in dit kanaal resonantie productie voorkomt in het $p \pi^+$ systeem (Δ^{++}) en in het $\pi^+ \pi^-$ systeem (ρ^0 of f^0) geeft de dichtheidsverdeling over de Goldhaber plot waarin horizontaal de massa

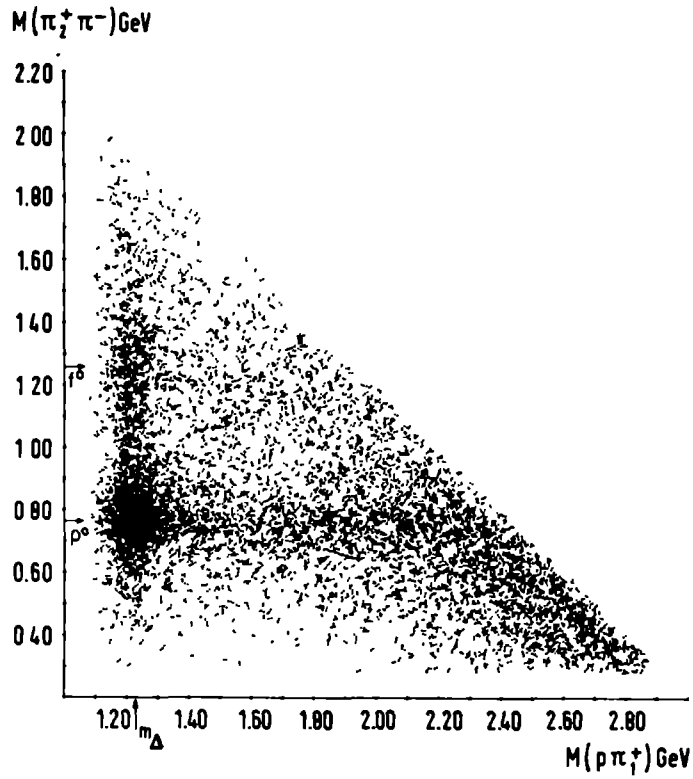


Fig. II.1a

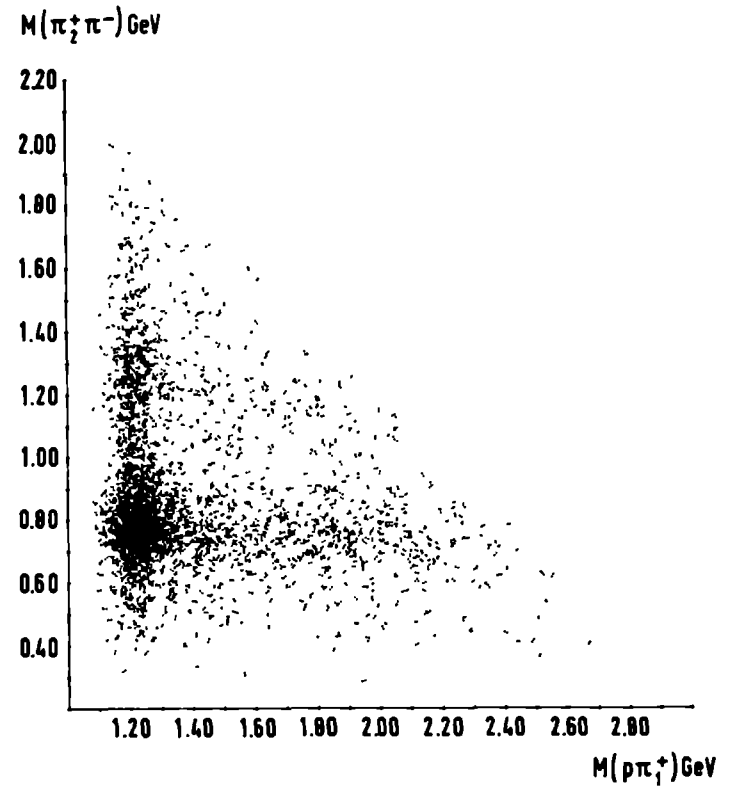


Fig. II.1b

Fig. II.1a en 1b. De Goldhaber plot $(p\pi_1^+, \pi_2^+\pi^-)$ voor het kanaal $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-$. In de linker figuur (II.1a) levert elk verschijnsel twee bijdragen t.g.v. π^+ verwisseling. In de rechter figuur (II.1b) is alleen de combinatie met de kleinste $|t(p, p\pi^+)|$ waarde uitgezet.

van het $p\pi^+$ systeem en vertikaal de massa van het $\pi^+\pi^-$ systeem is uitgezet, een duidelijk overzicht van het gehele kanaal (fig. II.1^a). Daar er in de eindtoestand twee π^+ mesonen voorkomen levert elk verschijnsel twee bijdragen tot deze Goldhaber-plot, waarvan hooguit één combinatie de "goede" is. Onder goed wordt in dit verband verstaan dat de beide deeltjes in een combinatie vervalsproducten zijn van één en dezelfde resonantie. De andere combinatie noemt men de "reflectie". Op grond van het feit dat de meeste reacties in dit kanaal bij een kleine absolute waarde van de impuls overdracht^{*} (t) tussen inkomend proton en uitgaand $p\pi^+$ systeem tot stand komen, tracht men de "goede" combinaties te selecteren door van elk verschijnsel die combinatie te kiezen welke de kleinste $|t|$ -waarde heeft (fig. II.1^b). Vergelijking van fig. II.1^a en II.1^b toont duidelijk aan dat de achtergrond ten gevolge van reflecties sterk wordt verminderd door toepassing van dit selectie criterium. Hier- van is gebruik gemaakt bij de bepaling van de $\Delta^{++} \rho^0$ en $\Delta^{++} f^0$ werkzame doorsneden.

II.c. Bepaling van de $\Delta^{++} \rho^0$ en $\Delta^{++} f^0$ werkzame doorsneden.

II.c.1. De werkzame doorsnede van beide reacties is bepaald door een Meest Aannemelijke Aanpassing (M.A.A.) van de dichtheidsverdeling der verschijnselen op de Goldhaber plot ($p\pi^+$, $\pi^+\pi^-$). Bij het opstellen van de aannemelijkheidsfunctie zijn de volgende eindtoestanden in aanmerking genomen:

^{*} Voetnoot: De definitie van de Mandelstam variabelen s en t is gegeven in Appendix 2.

- 1) $p\pi^+ \pi^+ \pi^-$ (fase ruimte x 1)
- 2) $\Delta^{++} \pi^+ \pi^-$ (fase ruimte x B.W. ($p\pi^+$))
- 3) $p\pi^+ \rho^0$ (fase ruimte x B.W. ($\pi^+ \pi^-$))
- 4) $\Delta^{++} \rho^0$ (fase ruimte x B.W. ($p\pi^+$) x B.W. ($\pi^+ \pi^-$) x $f(t)$)
- 5) $p\pi^+ f^0$ (fase ruimte x B.W. ($\pi^+ \pi^-$))
- 6) $\Delta^{++} f^0$ (fase ruimte x B.W. ($p\pi^+$) x B.W. ($\pi^+ \pi^-$) x $f'(t)$)

Achter elke eindtoestand staat vermeld welke representatie voor de verdeling over de Goldhaber plot van de verschijnselen behorende tot de betreffende eindtoestand is gebruikt. Zo wordt eindtoestand 1) beschreven met Lorentz-invariante fase ruimte verdeling, 2) met een product van fase ruimte en een relativistische Breit-Wigner formule voor het $p\pi^+$ systeem, enz. De gebruikte Breit-Wigner formule is gegeven in Appendix 1. Van de twee eindtoestanden waarvan de werkzame doorsnede bepaald wordt (nl. 4 en 6) is tevens een factor $f(t)$ ingevoerd om de invloed van de t-afhankelijkheid op de effectieve massaverdeling in rekening te brengen. Voor elke eindtoestand vindt men op de boven beschreven wijze een bepaalde verdelingsfunctie over de Goldhaber-plot $f_i(m_1, m_2)$, welke zodanig genormaliseerd is dat de integraal van f_i over de Goldhaber plot gelijk één is. Om rekentijd te besparen zijn niet voor elk verschijnsel de f_i 's berekend, maar zijn zij vooraf uitgerekend in het midden van twee dimensionale intervallen, in oppervlakte variërend van $40 \times 40 \text{ (MeV)}^2$ tot $10 \times 10 \text{ (MeV)}^2$, waarbij de grootte van de intervallen afhankelijk is gesteld van de variatie van de f_i 's over de verschillende intervallen.

De gebruikte aannemelijkheidsfunctie heeft de gedaante:

$$L(a_i) = - \sum_{k=1}^N n_k \left\{ \log \sum_{i=1}^6 a_i f_i(k) \right\} \quad (\text{II.1})$$

waarbij N = het aantal intervallen waarin de Goldhaber plot is verdeeld.

n_k = het aantal verschijnselen in interval k .

a_i = de bijdrage van eindtoestand i (intensiteitsparameter),

met de voorwaarde $\sum_{i=1}^6 a_i = 1$.

Met behulp van het programma MINUIT⁽¹⁵⁾ is de functie $L(a_i)$ geminimaliseerd met de a_i 's als variabelen.

II.c.2. Keuze van de Goldhaber plot.

Gaat men uit van de Goldhaber plot waarin elk verschijnsel twee bijdragen levert door verwisseling van de π^+ mesonen, dan kan men de achtergrond niet beschrijven met eindtoestand 1). Men zou, omdat in dit kanaal de resonantie productie zelf zo overvloedig is de "reflecties" van de resonanties expliciet in rekening moeten brengen. Om dit te vermijden is gebruik gemaakt van het feit dat de processen met dubbele resonantie productie overwegend optreden bij kleine absolute waarden van de impulsoverdracht $t(p, p\pi^+)$. Dat de methode, om van elk verschijnsel die $(p\pi^+, \pi^+\pi^-)$ combinatie te kiezen waarvan $|t(p, p\pi^+)|$ het kleinst is, de achtergrond sterk reduceert bleek reeds vroeger. Omdat echter de minimale waarde van de variabele $|t|$ toeneemt met de massa van het $p\pi^+$ en het $\pi^+\pi^-$ systeem, worden door de toepassing hiervan de combinaties met lage $(p\pi^+, \pi^+\pi^-)$ massa enigszins bevoordeeld. Getracht is dit te vermijden door invoering van t' -selectie, waarbij die combinatie verkozen wordt waarvan $t' = |t - t_{\min}|^*$ de kleinste is. Empirisch

*Voetnoot: De definitie van t' en t_{\min} is gegeven in Appendix 2.

blijkt dat met de door ons opgestelde aannemelijkheidsfunctie een iets betere aanpassing aan de Goldhaber plot wordt verkregen, indien de combinaties met het t' -criterium zijn geselecteerd. Hier staat tegenover dat men met het t' -criterium meer $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen verliest. Bestudering van de $(p\pi^+, \pi^+\pi^-)$ Goldhaber plot waarin de combinaties met maximale $|t|$ resp. t' zijn uitgezet leert namelijk dat men met $|t|$ selectie 1,5% van de $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen verliest en met t' selectie 6% van de $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen. Omdat beide methoden voor- en nadelen hebben is hiertussen geen keuze gemaakt, maar is van beide gebruik gemaakt om twee afzonderlijke bepalingen van de $\Delta^{++} \rho^0$ werkzame doorsnede te verkrijgen.

Behalve het probleem van de "reflecties" dat verminderen kan worden door zich te beperken tot de massa combinaties met minimum $|t|$ of t' , is een volgende moeilijkheid de mogelijke aanwezigheid van onbekende resonanties en de interferentie van de ρ^0 en f^0 met de achtergrond. Een illustratie hiervan geven de fig. II.2^a en II.2^b, waar de massaverdeling van het $\pi_2^+\pi^-$ systeem is weergegeven voor de verschijnselen waarvan de $p\pi_1^+$ massa in het Δ^{++} massa gebied is gelegen. In fig. a) is $\cos \theta_{\pi^+} > 0$ en in b) is $\cos \theta_{\pi^+} < 0$, waarbij θ_{π^+} de hoek is tussen de vliegrichtingen van het inkomend π_1^+ meson en het uitgaand π_2^+ meson in het π_2^+, π^- rustsysteem (zie fig. II.2^c). De eis dat de $p\pi_1^+$ massa in het Δ^{++} massa gebied is gelegen heeft tot doel zoveel mogelijk te vermijden dat een verschijnsel twee bijdragen tot de histogrammen levert. In de fig. II.2^a is er een duidelijke gescheiden ρ^0 en f^0 productie. In de fig. II.2^b met $\cos \theta_{\pi^+} < 0$ is de ρ^0 productie onderdrukt en is het dal tussen ρ^0 en f^0 opgevuld en de plaats van de top van de f^0 verschoven. Op grond van pariteitsbehoud verwacht men dat de resonanties symmetrisch t.o.v.

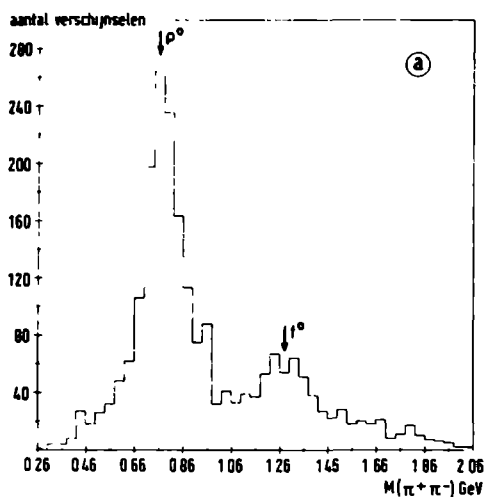


Fig. II.2a

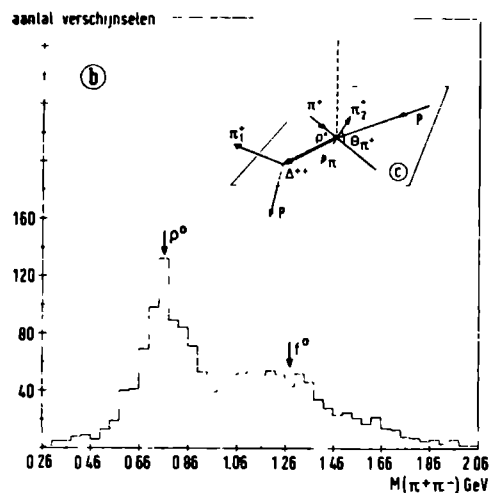


Fig. II.2b

Fig. II.2. De effectieve massaverdeling van het $(\pi_2^+ \pi^-)$ systeem van de verschijnselen waarvan de $(p\pi_1^+)$ -massa in het Δ^{++} massagebied is gelegen, voor $\cos \theta_{\pi^+} > 0$ (fig. II.2a) resp. $\cos \theta_{\pi^+} < 0$ (fig. II.2b).

$\cos \theta_{\pi^+} = 0$ vervallen, zodat de asymmetrie van fig. II.2^a en II.2^b duidt op interferentie van de ρ^0 -productie, f^0 -productie en achtergrond.

De asymmetrie van de ρ^0 is geen belemmering om de werkzame doorsnede van de $\Delta^{++} \rho^0$ productie te bepalen, omdat de gedaante van de ρ^0 in beide figuren ongeveer dezelfde is. Teneinde het massa gebied van de f^0 te vermijden is slechts een beperkt deel van de Goldhaber plot gebruikt om de $\Delta^{++} \rho^0$ werkzame doorsnede te bepalen. De begrenzings van het gebruikte gebied zijn

$$1,080 \leq m_{p\pi^+} \leq 1,880 \text{ GeV en } 0,280 \leq m_{\pi^+ \pi^-} \leq 1,040 \text{ GeV.}$$

Wanneer men de combinaties selecteert waarvoor t' minimaal is en bovendien $\cos \theta_{\pi^+} > 0$ is het mogelijk met de boven beschreven aannemelijkheidsfunctie een goede aanpassing te verkrijgen voor de gehele Goldhaber plot. Hiervan is gebruik gemaakt om de $\Delta^{++} f^0$ werkzame doorsnede te schatten. Omdat voor "echte" $\Delta^{++} f^0$ verschijnselen met $\cos \theta_{\pi^+} > 0$ de $|t|$ of t' waarde van de "reflectie" hoog is, behoeft men geen correctie toe te passen voor $\Delta^{++} f^0$ verschijnselen die door t' selectie verloren zijn gegaan. Om de totale $\Delta^{++} f^0$ werkzame doorsnede te schatten is het aantal $(\Delta^{++} f^0) \cos \theta_{\pi^+} > 0$ verschijnselen dat uit de aanpassing volgt vermenigvuldigd met de factor $\frac{2}{1+R}$, waarbij R de Voorwaarts - Achterwaarts verhouding is. Deze is gedefinieerd als:

$$R = \frac{F - B}{F + B} \quad (\text{II.2})$$

met $F = \text{aantal verschijnselen met } \cos \theta_{\pi^+} > 0$ } in het $\Delta^{++} f^0$
 $B = \text{aantal verschijnselen met } \cos \theta_{\pi^+} < 0$ } massa gebied.

II.c.3. Gebruikte constanten.

α) De t -afhankelijkheid van de dubbele resonantie processen, die in par. II.c.1. is weergegeven door de functies $f(t)$ en $f'(t)$ voor de toestanden 4) en 6) is afgeleid uit de $\ln \frac{d\sigma}{dt'}$ vs. t' verdelingen zoals deze in Hfdst. IV zijn gegeven. Het blijkt dat men deze $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdelingen kan parametriseren door de functie:

$$\frac{d\sigma}{dt'} \sim e^{at} + C e^{bt}$$

waarbij $C = e^{(b-a)t_0}$. t_0 is de abscis van het snijpunt van de twee asymptotische lijnen (met richtingscoëfficiënten a en b),

die men op de experimentele $\ln \frac{d\sigma}{dt}$ verdeling kan tekenen. Omdat er voor een punt op de Goldhaber plot meer t waarden mogelijk zijn, afhankelijk van de productie hoek θ (Appendix 2), zijn de functies $f(t)$ en $f'(t)$ door integratie over θ uitgedrukt in gewichtsfactoren die alleen van $m_{p\pi^+}$ en $m_{\pi^+\pi^-}$ afhankelijk zijn (App. 3):

$$\int f(t) d \cos \theta = g(m_{p\pi^+}, m_{\pi^+\pi^-}) = e^{at_{\min} \left(\frac{1 - e^{4aqq'}}{4aqq'} \right) + c e^{bt_{\min} \left(\frac{1 - e^{4bqq'}}{4bqq'} \right)} \quad (\text{II.3})$$

De betekenis van t_{\min} , q en q' is dezelfde als die in App. 2. De waarden van a , b en t_0 staan vermeld in tabel II.1.

Tabel II.1. Parameters voor de t afhankelijkheid van de dubbel resonantie productie.

Eindtoestand	a in $(\text{GeV})^{-2}$	b in $(\text{GeV})^{-2}$	$ t_0 $ in $(\text{GeV})^2$
$\Delta^{++} \rho^0$	16,7	2,7	0,25
$\Delta^{++} f^0$	11,9	1,6	0,35

- β) Als nominale waarden van de massa en breedte van de f^0 zijn gebruikt die welke vermeld staan in de Review of Particle Data Properties⁽¹³⁾, nl. $m = 1,264 \text{ GeV}$ en $\Gamma = 0,150 \text{ GeV}$. De nominale waarde van de breedte en massa van Δ^{++} en ρ^0 zijn bepaald door de aanpassingsprocedure te herhalen bij verschillende waarden voor deze grootheden, totdat de beste aanpassing werd verkregen. Als maat voor de beste aanpassing is gebruikt de minimale waarde van:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(N_i^e - N_i^t)^2}{N_i^t} \quad (\text{II.4})$$

van de projecties van de Goldhaber plot op de horizontale as voor Δ^{++} en op de verticale as voor ρ^0 . De getallen N_i^e en N_i^t zijn resp. het aantal verschijnselen in interval i en het door de aanpassing voorspelde aantal. De som over i is hierbij niet over alle intervallen uitgevoerd, maar alleen over die welke in het resonantie gebied zijn gelegen.

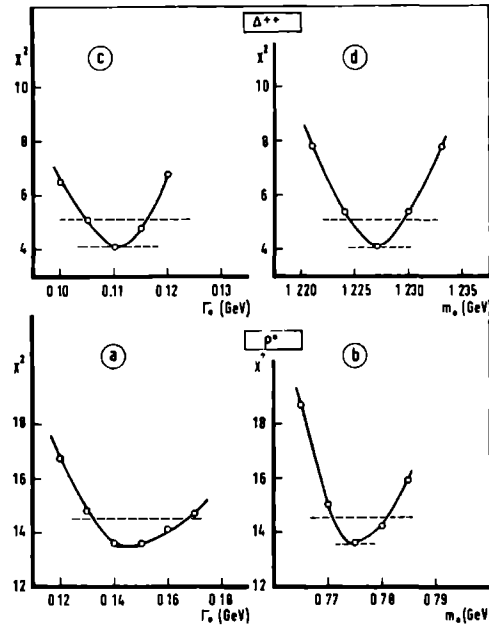


Fig. II.3a t/m d.

Fig. II.3. De χ^2 van de aanpassing in het resonantie gebied als functie van de nominale waarden van de breedte (Γ_0) en de massa (m_0) van de resonanties. De horizontale lijnen geven de niveaus χ_{\min}^2 en $\chi_{\min}^2 + 1$ weer.

Uit de fig. II.3a t/m II.3d waar de variatie van de χ^2 als functie van de bepalen grootte is uitgezet, zijn de nominale waarden bepaald. Als onder- en bovengrens (1 standaarddeviatie) zijn gegeven de snijpunten van de "parabolische" figuur met de horizontale lijn $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 1$. Hierbij is verondersteld dat de nominale waarden van de massa en breedte onafhankelijk van elkaar bepaald kunnen worden. De gevonden waarden zijn:

Tabel II.2. De massa en de breedte van de ρ^0 en Δ^{++} resonanties.

	m_0 in GeV	Γ_0 in GeV
ρ^0	$.774 \pm .006$ $- .004$	$.145 \pm .020$ $- .014$
Δ^{++}	$1.227 \pm .003$ $- .003$	$.110 \pm .006$ $- .006$

II.c.4. Resultaten van de aanpassing.

a) De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$.

In tabel II.3 is aangegeven het aantal $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen dat uit de aanpassing volgt (kolom I), waarbij in de eerste rij de getallen staan verkregen met t' -selectie en in de tweede rij met $|t|$ -selectie. Op deze getallen moeten twee correcties worden toegepast om het totaal aantal $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen te bepalen.

Ten eerste is door het gebruik van een beperkt gedeelte van de Goldhaber plot een gedeelte van de $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen weggesneden. Deze correctie bedraagt 5,2% (kolom II).

Vervolgens moet een correctie worden toegepast voor $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen die verloren zijn gegaan door het t' - of t -selectie criterium. Deze aantallen staan vermeld in kolom III.

In kolom IV is dan tenslotte het totaal aantal $\Delta^{++} \rho^0$ verschijnselen gegeven en in kolom V de daarbij behorende werkzame doorsnede in mb.

Tabel II.3. Werkzame Doorsnede van de $\Delta^{++} \rho^0$ productie.

	I	II	III	IV	V
$\Delta^{++} \rho^0$ met t'-selectie	1895 ± 120	99	120 ± 50	2114 ± 220	$.86 \pm .09$ mb
$\Delta^{++} \rho^0$ met t-selectie	2080 ± 120	104	30 ± 40	2214 ± 220	$.90 \pm .09$ mb

Bij de opgegeven fouten in kolom IV is behalve met de fout op het aantal in kolom I, die uit de aanpassingsprocedure volgt, ook rekening gehouden met de fouten voortvloeiende uit de spreiding van de nominale waarden van de massa's en breedtes van de resonanties. De belangrijkste bron van fouten is in dit verband de spreiding op $\Gamma_0 (\rho^0)$.

Om een inzicht te verschaffen in de kwaliteit van de aanpassing worden in de fig. II.4 t/m II.7 de projecties van gedeelten van de Goldhaber plot op de $p\pi^+$ -as en de $\pi^+\pi^-$ -as getoond, waarbij het histogram de experimentele verdeling weergeeft en de getrokken lijn de voorspelde verdeling. Als meer kwantitatieve maat is de verhouding van de χ^2 (form. II.4) tot het aantal intervallen N waarover de χ^2 is bepaald (ongeveer 40 intervallen) gegeven in tabel II.4.

Tabel II.4. χ^2/N van de aanpassing voor verschillende doorsneden van de Goldhaber plot.

		Projecties op de $p\pi^+$ -as				Projecties op de $\pi^+\pi^-$ -as			
		$\pi^+\pi^-$ massa interval in GeV				p^+ massa interval in GeV			
		.28-1.04	.28-.66	.66-.86	.86-1.04	1.08-1.88	1.14-1.30	1.30-1.56	1.56-1.88
t'-selectie	figuur	4 ^a	4 ^b	4 ^c	4 ^d	5 ^a	5 ^b	5 ^c	5 ^d
	χ^2/N	.76	.67	.94	.78	1.09	.97	.98	1.10
t-selectie	figuur	6 ^a	6 ^b	6 ^c	6 ^d	7 ^a	7 ^b	7 ^c	7 ^d
	χ^2/N	.89	.63	1.08	1.08	1.18	1.50	1.09	1.05

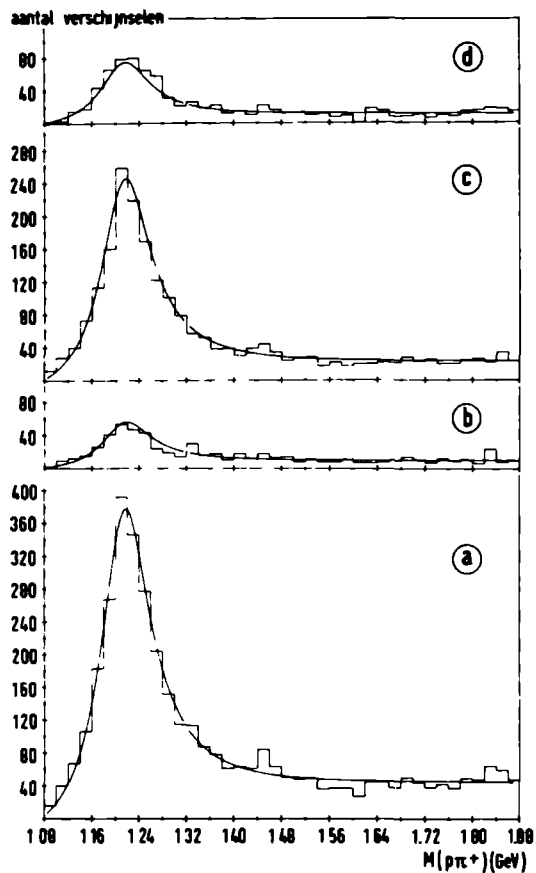


Fig. II.4.

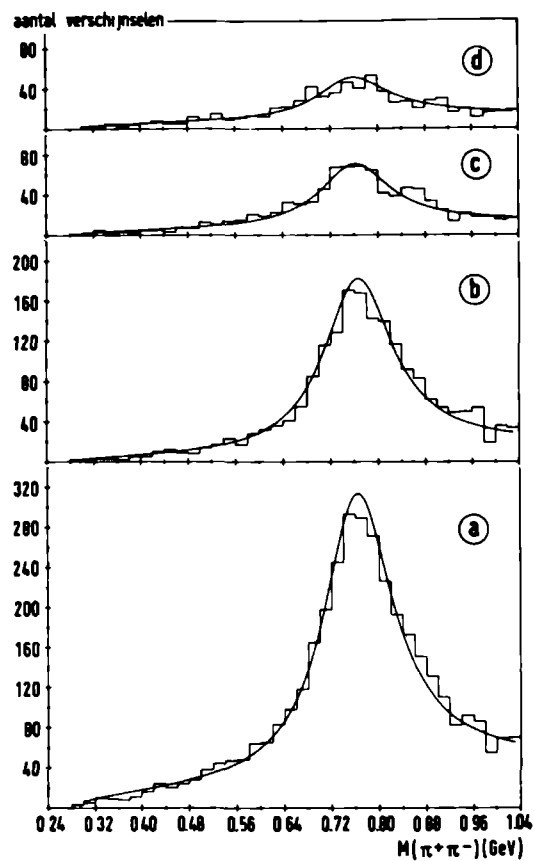


Fig. II.5.

Fig. II.4 en 5. Projecties van gedeelten van de $(p\pi^+, \pi^+\pi^-)$ Goldhaber plot op de $p\pi^+$ resp. $\pi^+\pi^-$ as. De getrokken lijnen zijn de projecties van de verdelingsfunctie. Bijzonderheden zijn gegeven in tabel II.4.

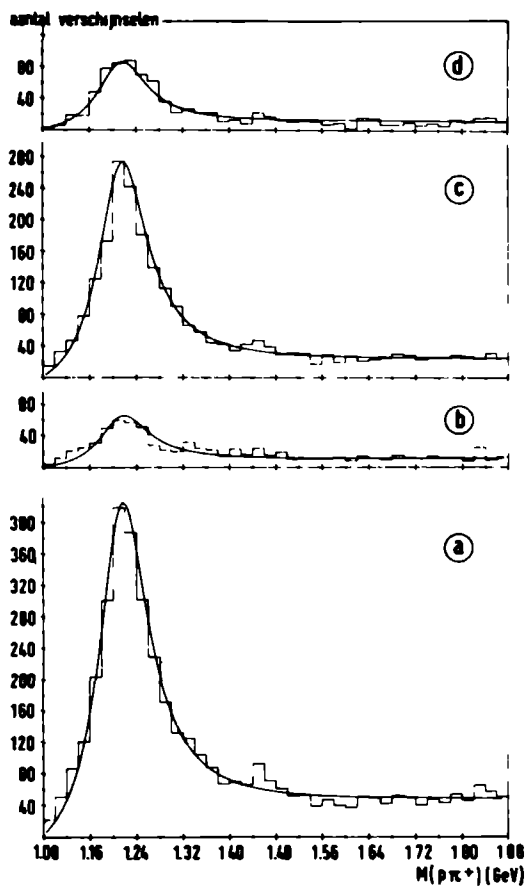


Fig. II.6.

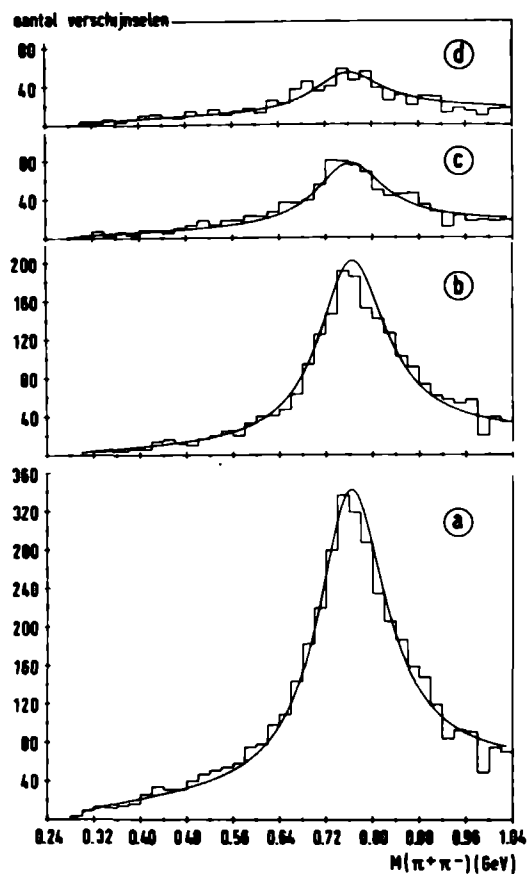


Fig. II.7.

Fig. II.6 en 7. Projecties van gedeelten van de $(p\pi^+, \pi^+\pi^-)$ Goldhaber plot op de $p\pi^+$ resp. $\pi^+\pi^-$ as. De getrokken lijnen zijn de projecties van de verdelingsfunctie. Bijzonderheden zijn gegeven in tabel II.4.

Uit de fig. II.4 t/m II.7 en de χ^2/N verhoudingen blijkt dat voor beide Goldhaber plots (verkregen met t' - resp. t -selectie) de aanpassing goed is.

β) De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f^0$.

Uit de aanpassing op de gehele Goldhaber plot waarin alle combinaties voorkomen met $\cos \theta_{\pi^+} \geq 0$ en t' minimaal, volgt dat het aantal $\Delta^{++} f^0$ waarbij de f^0 voorwaarts vervalst (309 ± 30) is. Uit de Goldhaber plot van de combinaties met $\cos \theta_{\pi^+} \geq 0$ en t' maximaal blijkt dat een correctie voor $\Delta^{++} f^0$ verschijnselen die verloren zijn gegaan overbodig is, hetgeen men op grond van kinematische overwegingen ook zou verwachten.

De Voorwaarts-Achterwaarts Verhouding (form. II.2) is voor de verschijnselen in het $\Delta^{++} f^0$ massa gebied $0,13 \pm 0,05$. Hieruit volgt dat de totale $\Delta^{++} f^0$ productie gelijk is aan 547 ± 60 verschijnselen. Brengt men een correctie van 50% aan voor het neutrale verval van de $f^0 (f^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)$ dan verkrijgt men een werkzame doorsnede van $(0,34 \pm 0,04)$ mb voor de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f^0 (f^0 \rightarrow \pi\pi)$. De fout op de werkzame doorsnede is statistisch en moet in verband met de onzekerheden in de analyse met een zekere reserve beschouwd worden.

In de fig. II.8 zijn de projecties van de Goldhaber plot op de $p\pi^+$ -as gegeven voor verschillende massa intervallen van het $\pi^+\pi^-$ -systeem, en in fig. II.9 de projecties op de $\pi^+\pi^-$ -as voor verschillende $p\pi^+$ massa intervallen. Over het algemeen is de aanpassing behoorlijk. Van speciaal belang zijn de fig. II.8d en II.9b die resp. de Δ^{++} productie in het f^0 massa gebied en de f^0 productie in het Δ^{++} massa gebied weergeven. Uit deze laatste figuur II.9^b ziet men dat de $\pi^+\pi^-$ massa verdeling in het f^0 gebied minder goed met een Breit-Wigner

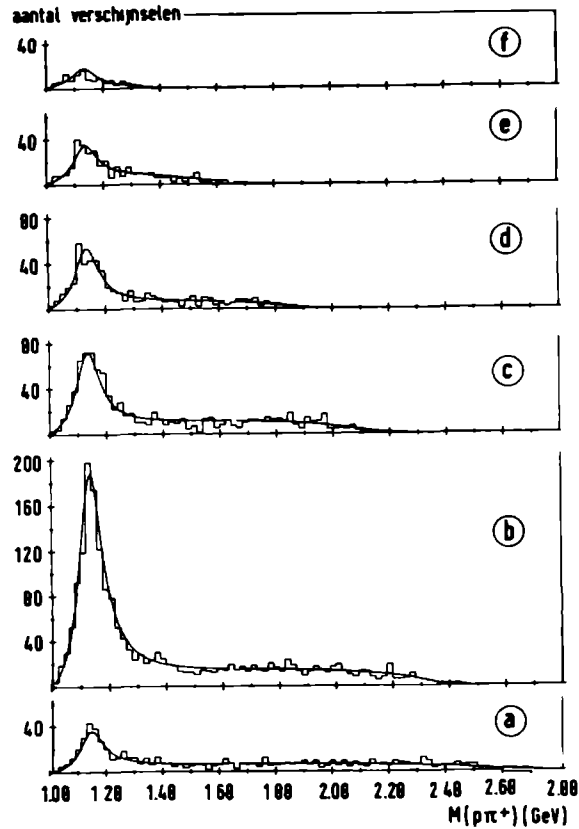


Fig. II.8.

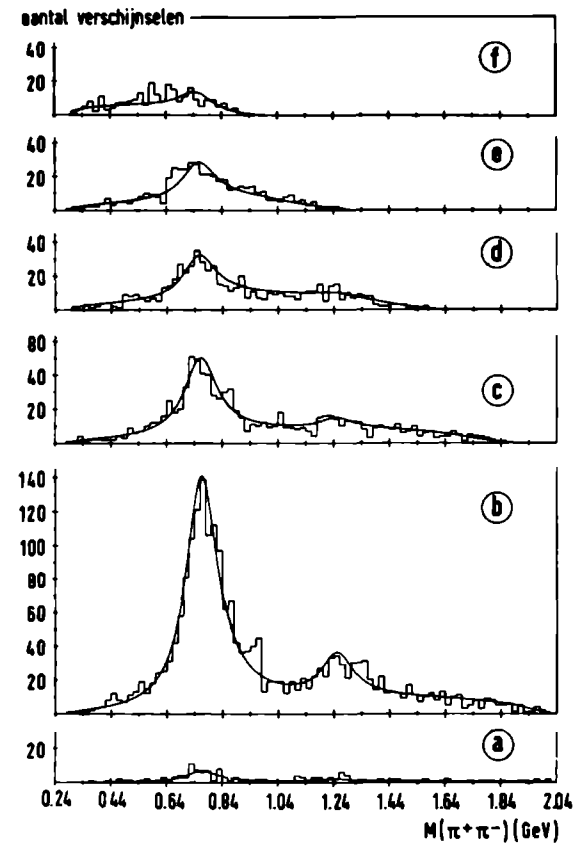


Fig. II.9.

Fig. II.8 en 9. Projecties van gedeelten van de $(p\pi^+, \pi^+\pi^-)$ Goldhaber plot voor de verschijnselen met $\cos \theta_+ > 0$. In fig. II.8 zijn de projecties op $p\pi^+$ as gegeven voor verschillende intervallen van de $\pi^+\pi^-$ massa. De grenzen van de intervallen zijn (in GeV): 0,24-0,66(a); 0,66-0,86(b); 0,86-1,16(c); 1,16-1,36(d); 1,36-1,64(e); 1,64-2,04(f). In fig. II.9 zijn de projecties op de $\pi^+\pi^-$ as gegeven voor verschillende intervallen van de $p\pi^+$ massa. De grenzen van de intervallen zijn (in GeV): 1,08-1,14(a); 1,14-1,30(b); 1,30-1,56(c); 1,56-1,88(d); 1,88-2,28(e); 2,28-2,88(f).

resonantie curve beschreven kan worden.

II.d. Bepaling van de totale ρ^0 en Δ^{++} productie.

De schatting van de totale ρ^0 en Δ^{++} productie is in twee stappen uitgevoerd. Een eerste benadering is verkregen door het aantal resonantie verschijnselen (N_R) te schatten aan de hand van de effectieve massa verdeling van de combinatie van die deeltjes waarin de resonantie vervalst (fig. II.10 voor ρ^0 en fig. II.11 voor Δ^{++}). Hierbij is gebruik gemaakt van de formule:

$$N_R = \frac{N_1 - N_2}{1 - T_R} \cdot \frac{1}{P_R}$$

waarin

N_1 = het aantal verschijnselen in het resonantie massa gebied (gebied 1).

N_2 = het aantal verschijnselen in het aangrenzende gebied (gebied 2).

$T_R = \frac{\text{aantal resonantie verschijnselen in gebied (2)}}{\text{aantal resonantie verschijnselen in gebied (1)}}$

$P_R = \frac{\text{aantal resonantie verschijnselen in gebied (1)}}{\text{totaal aantal resonantie verschijnselen.}}$

Bij de afleiding van deze formule is verondersteld dat de massa intervallen van gebied (1) en (2) even groot zijn en dat de achtergrond lineair verloopt. De getallen T_R en P_R kan men berekenen uit de grootte van de massa intervallen en de massa en breedte van de resonantie. Voor de nominale waarden m_0 en Γ_0 zijn deze gebruikt, welke in Tabel II.2 vermeld staan. In tabel II.5 is een samenvatting van de berekeningen gegeven.

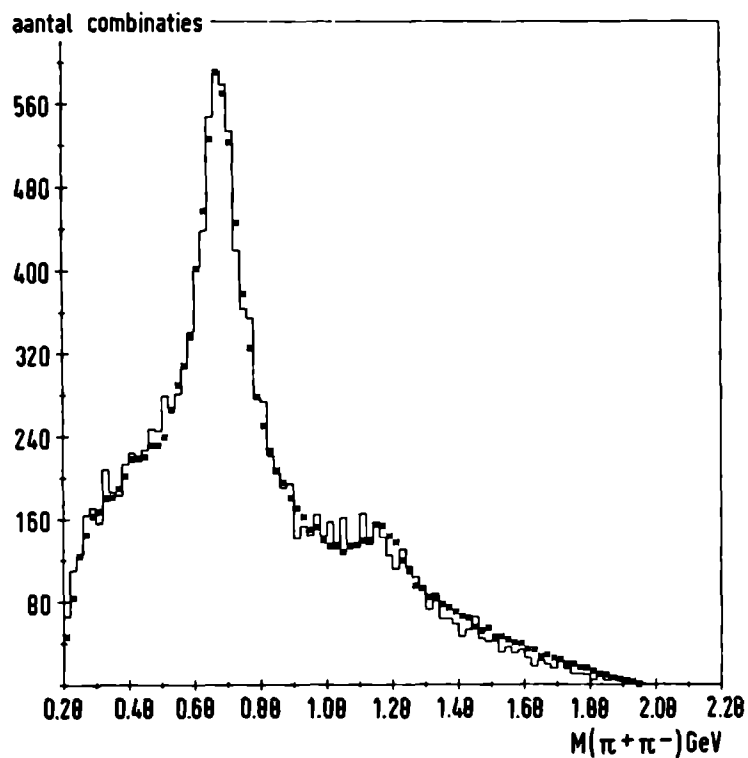


Fig. II.10.

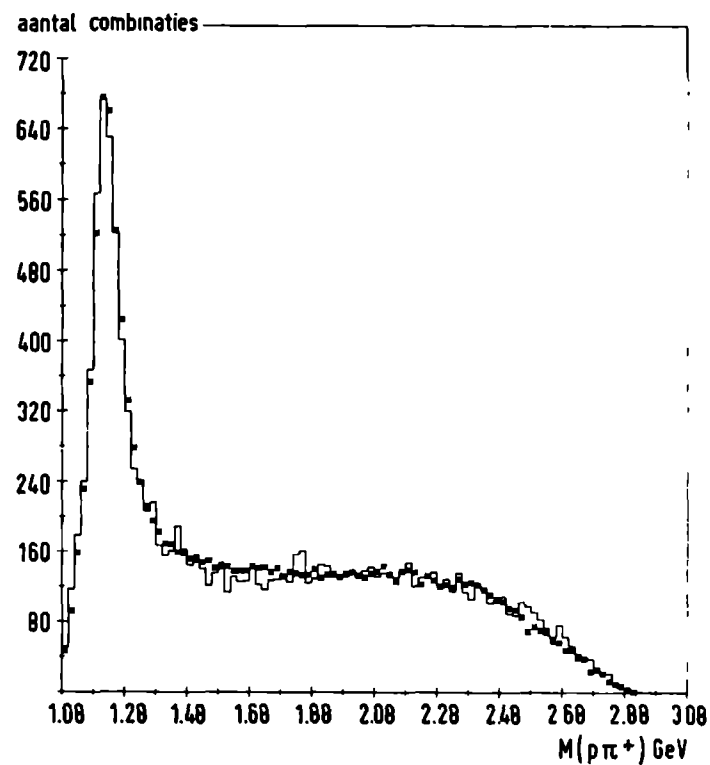


Fig. II.11.

Fig. II.10 en 11. De histogrammen van de effectieve massa verdeling van het $\pi^+ \pi^-$ resp. $p\pi^+$ systeem. Elk verschijnsel geeft twee bijdragen wegens π^+ verwisseling. De punten zijn de met Monte-Carlo methoden verkregen predicties van de betreffende effectieve massa verdeling. Voor bijzonderheden wordt naar de tekst verwezen.

Tabel II.5. Eerste benadering totale werkzame doorsnede voor ρ^0 en Δ^{++} productie.

Reso- nantie	massa interval in GeV		N_1	N_2	T_R	P_R	N_R
	Resonantie gebied (1)	Aangrenzend gebied (2)					
ρ^0	0,66-0,86	0,56-0,66 en 0,86-0,96	4568	2542	$0,263 \pm 0,035$	$0,709 \pm 0,032$	3876 ± 250
Δ^{++}	1,14-1,30	1,06-1,14 en 1,30-1,38	3720	1264	$0,189 \pm 0,008$	$0,757 \pm 0,009$	4000 ± 150

Aangezien deze methode alleen juist is als de achtergrond onder de resonantie een lineair verloop heeft en zich evenveel achtergrond verschijnselen in gebied (1) en (2) bevinden, is getracht om met Monte-Carlo methoden de schatting te toetsen en zo mogelijk te verbeteren. Dit is speciaal van belang voor de Δ^{++} resonantie welke aan de rand van de faseruimte ligt waar de achtergrond in de verschillende gebieden sterk kan variëren.

Met behulp van het programma FOWL⁽¹⁴⁾ zijn de volgende categoriën verschijnselen gegenereerd.

$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$ volgens Lorentz-invariantie faseruimte
 $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ met een t-afhankelijkheid zoals die is beschreven in par. II.c.3. Bovendien is de anisotropie en asymmetrie van het ρ^0 -verval in rekening gebracht door alle verschijnselen te wegen met een

factor^{*} $(0,57 x^2 + 0,28 x + 0,15)$, waarbij x de $\cos \theta_{\pi^+}$ is zoals deze is gedefinieerd in par. II.c.2.

$$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f^0$$

met een t-afhankelijkheid die in par. II.c.3 is beschreven.

$$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \pi^+ \pi^-$$

met een t-afhankelijkheid in de vorm van een gewichtsfactor $e^{at_{\pi,\pi}}$. Hierbij is $t_{\pi,\pi}$ de impuls overdracht tussen inkomend π^+ en het uitgaande π^+ dat niet met de Δ^{++} is geassocieerd. Voor a is de waarde $7,0(\text{GeV})^{-2}$ gebruikt. Met deze keuze voor a sluit de FOWL-predictie voor de effectieve massa verdeling van het $p\pi^+\pi^-$ systeem - welke voor deze gewichtsfactor het gevoeligst is - zo goed mogelijk bij de data aan.

$$\pi^+ p \rightarrow p\pi^+ \rho^0$$

met een zelfde t-afhankelijkheid als voor $\Delta^{++} \pi^+ \pi^-$, maar nu voor $t_{p,p}$, de impuls overdracht tussen inkomend en uitgaand proton. Voor a is wederom de waarde $7,0 (\text{GeV})^{-2}$ gebruikt, voor welke waarde de FOWL-predictie voor de $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ massa-verdeling het beste bij de data aansluit. Bovendien is een gewichtsfactor^{*} voor de $\cos \theta_{\pi^+}$ verdeling ingevoerd:

^{*} De gebruikte gewichtsfactoren zijn verkregen door $\cos \theta_{\pi^+}$ verdelingen van de betreffende verschijnselen met een kwadratische vorm $ax^2 + bx + c$ aan te passen. De verschijnselen die tot de $\cos \theta_{\pi^+}$ verdelingen hebben bijgedragen voldeden aan de volgende criteria:

$\Delta^{++} \rho^0$: $p\pi_1^+$ massa in Δ^{++} massa gebied, $\pi_2^+ \pi^-$ massa in ρ^0 massa gebied, $t'_{\pi_1^+, \pi_2^+ \pi^-} \leq 0,4 (\text{GeV})^2$.

$p\pi^+ \rho^0$: $p\pi_1^+$ massa buiten Δ^{++} massa gebied, $\pi_2^+ \pi^-$ massa in ρ^0 massa gebied, $t'_{p,p} \leq 0,4 (\text{GeV})^2$.

$$(0,41x^2 + 0,36x + 0,24).$$

De reactie $\pi^+ p \rightarrow p A_2^+$ is niet in rekening gebracht, daar deze geringe invloed heeft op de $p\pi^+$ en $\pi^+\pi^-$ massa verdelingen, waarin we hier primair geïnteresseerd zijn. De eindtoestand $p\pi^+ f^0$ is buiten beschouwing gelaten omdat in de effectieve-massa verdeling van de $(\pi_2^+\pi^-)$ combinatie voor verschijnselen waarvan de massa van de $(p\pi_1^+)$ combinatie buiten het Δ^{++} massa gebied ligt, de f^0 niet wordt waargenomen.

De massa verdelingen van de $(\pi^+\pi^-)$ combinatie en de $(p\pi^+)$ combinatie van de verschijnselen die volgens de 5 boven beschreven reacties zijn gegenereerd, zijn in verhoudingen welke voortvloeien uit de voorafgaande berekeningen bij elkaar opgeteld en vergeleken met de experimentele verdelingen. Op grond van deze vergelijking zijn correcties toegepast op de percentages van de bijdrage van de eindtoestanden $\Delta^{++} \pi^+\pi^-$, $p\pi^+ \rho^0$ en $p\pi^+ \pi^+\pi^-$. Omdat de $\Delta^{++} \rho^0$ en $\Delta^{++} f^0$ bijdragen reeds nauwkeuriger bepaald zijn dan met de hier besproken methode mogelijk is zijn deze niet veranderd.

De beginwaarden en de gecorrigeerde waarden zijn samengevat in tabel II.6 terwijl in de fig. II.10 en II.11 de experimentele massa verdelingen vergeleken worden met de gegenereerde verdelingen. De fouten op de aantallen die gegeven zijn in tabel II.6 kunnen gesteld worden op 10%, behalve de fouten op totaal- Δ^{++} en totaal- ρ^0 welke kleiner zijn (ongeveer 5%).

Tabel II.6.

Eindtoestand	Beginwaarden		Eindwaarden	
	aantal	percentage	aantal	percentage
$\Delta^{++} \rho^0$	2164	32,0	2164	32,0
$\Delta^{++} f^0$	547	8,1	547	8,1
$\Delta^{++} \pi^+ \pi^-$	1289	19,1	1269	18,8
$p \pi^+ \rho^0 \star)$	1712	25,4	1802	26,7
Rest	1039	15,4	969	14,4
Totaal Δ^{++}	4000	59,2	3980	59,0
Totaal ρ^0	3876	57,4	3966	58,7

II.e. Het 1C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$.

Duidelijk herkenbare quasi twee lichamen reacties met dubbele resonantie productie vindt men in de eindtoestanden $\Delta^{++} \eta^0$, $\Delta^{++} \omega^0$ en $\Delta^{++} A_2^0$. De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} A_2^0$ is niet in ons onderzoek betrokken omdat de A_2^0 niet direct, maar via een intermediair ρ^\pm meson naar de stabiele eindtoestand $\pi^+ \pi^- \pi^0$ vervalst. Resultaten met betrekking tot de spin-pariteit analyse van de A_2^0 en de aard van het productie proces zijn gepubliceerd in Ref. (10) en (11). In de Goldhaberplot (fig. II.12), waarbij horizontaal de massa van het $p \pi^+$ systeem en verticaal de massa van het $\pi^+ \pi^- \pi^0$ systeem is uit-

★) Een gedeelte van deze 26,7% ρ^0 productie komt voort uit het verval het A_2^+ -meson ($A_2^+ \rightarrow \rho^0 \pi^+$), welke laatste in de reactie $\pi^+ p \rightarrow p A_2^+$ wordt gevormd en bij 7,5% van alle verschijnselen voorkomt (10,11).

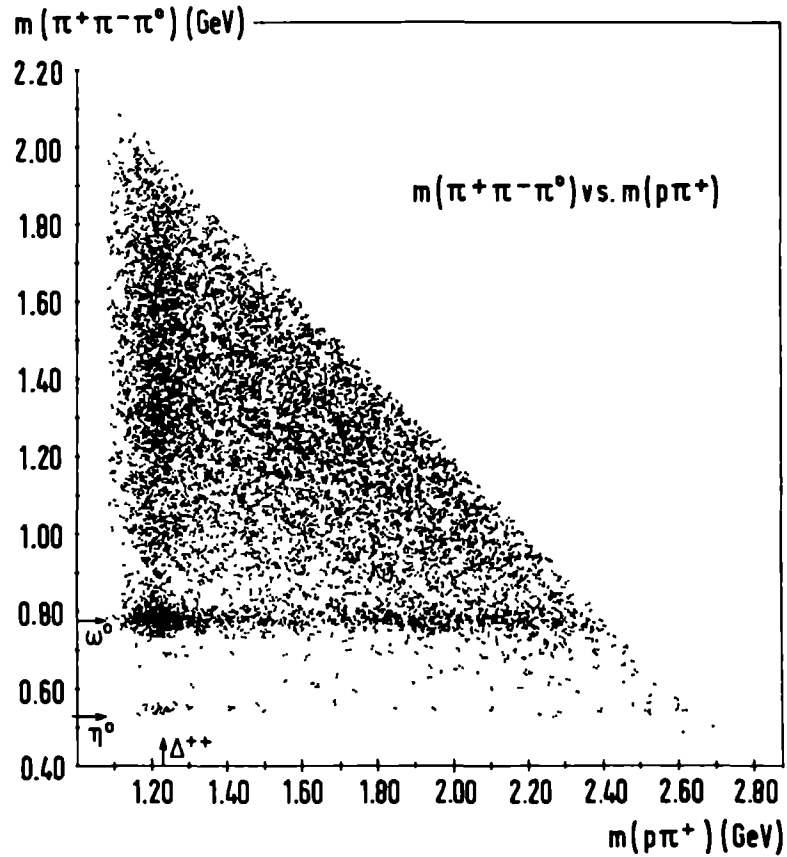


Fig. II.12. De Goldhaber plot ($p\pi^+, \pi^+\pi^-\pi^0$) voor het kanaal $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$. Elk verschijnsel levert twee bijdragen t.g.v. π^+ verwisseling.

gezet, zijn alle drie de reacties waarneembaar. In Tabel II.7 zijn de aantallen verschijnselen in de $\pi^+\pi^-\pi^0$ eindtoestand en de werkzame doorsneden van deze reacties gegeven, waarbij de werkzame doorsneden gecorrigeerd zijn voor andere vervalswijzen⁽¹³⁾. De $\Delta^{++}\eta_0$ werkzame doorsnede is bepaald door het aantal η_0 verschijnselen te schatten waarvan de $p\pi^+$ massa binnen resp. buiten het Δ^{++} massa ge-

bied is gelegen.

Tabel II.7. Werkzame Doorsnede van de belangrijkste twee deeltjes reacties (gecorrigeerd voor andere vervalswijzen).

Eindtoestand	Aantal verschijnselen	σ in mb.
$\Delta^{++} \eta^0$	40	0.083 ± 0.017
$\Delta^{++} \omega^0$	630	0.28 ± 0.01
$\Delta^{++} A_2^0$	541	0.22 ± 0.03

II.e.1. Bepaling van de $\Delta^{++} \omega^0$ werkzame doorsnede.

Op eenzelfde wijze als voor de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$, is de $\Delta^{++} \omega^0$ werkzame doorsnede bepaald door een aanpassing aan de Goldhaber plot, met dit verschil dat de reflecties niet vermeden konden worden door toepassing van een $|t|$ of t' selectie criterium, aangezien de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$ een veel minder perifeer karakter heeft.

Bij de opstelling van de aannemelijkheidsfunctie zijn de volgende eindtoestanden in aanmerking genomen:

- 1) $p\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$ (fase ruimte x 1)
- 2) $\Delta^{++} \pi^+\pi^-\pi^0$ (fase ruimte x BW ($p\pi^+$))
- 3) $p\pi^+ \omega^0$ (fase ruimte x G ($\pi^+\pi^-\pi^0$))
- 4) $\Delta^{++} \omega^0$ (fase ruimte x BW ($p\pi^+$) x G ($\pi^+\pi^-\pi^0$)
x f(t)).

De ω^0 resonantie is niet door een Breit-Wigner formule maar een Gauss-kromme ($G(\pi^+\pi^-\pi^0)$) beschreven, omdat de meetfouten op de effectieve massa van het $\pi^+\pi^-\pi^0$ systeem groter

zijn dan de intrinsieke breedte van de ω^0 .

Omdat het niet mogelijk bleek de gehele Goldhaber plot verdeling op adequate wijze met deze aannemelijkheidsfunctie weer te geven, ook al werd rekening gehouden met de eindtoestanden waarin η^0 en A_2^0 productie optreedt, hebben wij ons beperkt tot een gebied gelegen binnen de grenzen: $1,08 \leq m_{p\pi^+} \leq 1,88$ GeV en $0,600 \leq m_{\pi^+\pi^-\pi^0} \leq 1,00$ GeV. In dit gebied kunnen de achtergrond verschijnselen, inclusief de reflecties van de eindtoestanden 2π of 4π op redelijke wijze beschreven worden met een statistische fase ruimte verdeling, zoals moge blijken uit fig. II.13^{a,b}. In de Goldhaber plots ($p\pi^-$, $\pi^+\pi^+\pi^0$) en ($p\pi^0$, $\pi^+\pi^+\pi^-$) komen de Δ^{++} en ω^0 resonanties niet voor, maar wel de reflecties door π_1^+ , π^- resp. π_1^+ , π^0 in plaats van π_1^+ , π_2^+ verwisseling. De verdeling van deze verschijnselen zal dus ongeveer dezelfde zijn als van de achtergrond verschijnselen in de oorspronkelijke Goldhaber plot. In de fig. II.13^a en 13^b zijn de projecties op de horizontale en verticale as van de rechthoekige gebieden van deze twee Goldhaber plots tesamen weergegeven. De getrokken lijnen zijn de projecties van de fase ruimte verdeling, genormaliseerd op het totaal aantal verschijnselen. Daar deze lijnen redelijk bij de verdelingen aansluiten, mag men verwachten dat de fase ruimte verdeling een voldoende nauwkeurige beschrijving is van de achtergrond in de oorspronkelijke Goldhaber plot ($p\pi_1^+$, $\pi_2^+\pi^-\pi^0$).

II.e.2. Gebruikte constanten.

De nominale waarden van de massa van Δ^{++} en ω^0 , de breedte

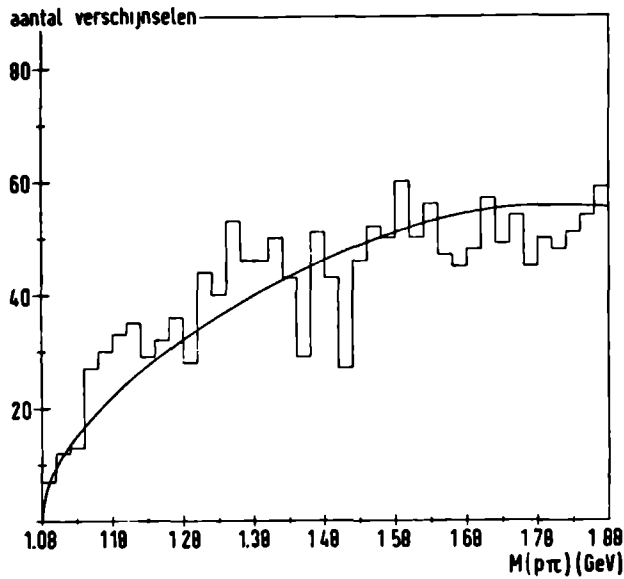


Fig. II.13a.

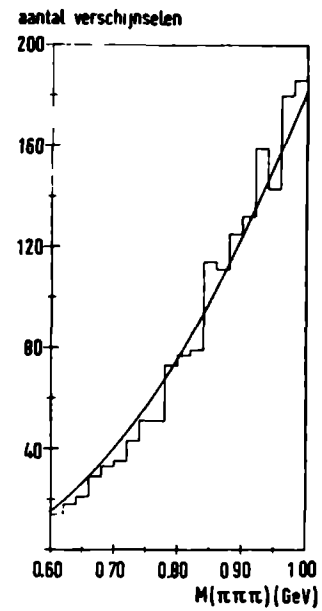


Fig. II.13b.

Fig. II.13. Projecties van de rechthoekige gedeelten ($1,08 \leq m_{p\pi} \leq 1,88$ GeV, $0,60 \leq m_{\pi\pi\pi} \leq 1,00$ GeV) uit de $(p\pi^-, \pi^+\pi^+\pi^0)$ en $(p\pi^0, \pi^+\pi^+\pi^-)$ Goldhaber plots op de $p\pi$ en $\pi\pi\pi$ as. De getrokken lijn is de faseruimte verdeling.

van de Δ^{++} en de spreiding σ van de Gausscurve voor de ω^0 zijn op dezelfde wijze als in par. II.c.3 is besproken, verkregen uit de fig. II.14^a t/m II.14^d. De verkregen waarden zijn gegeven Tabel II.8.

Tabel II.8: Massa en breedte van de ω^0 en Δ^{++} resonanties.

	m_0 in GeV	Γ_0 in GeV
ω^0	$.781 \pm .003$	$2\sigma = .038 \pm .004$
Δ^{++}	$1.222 \pm .004$	$.108 \pm .010$

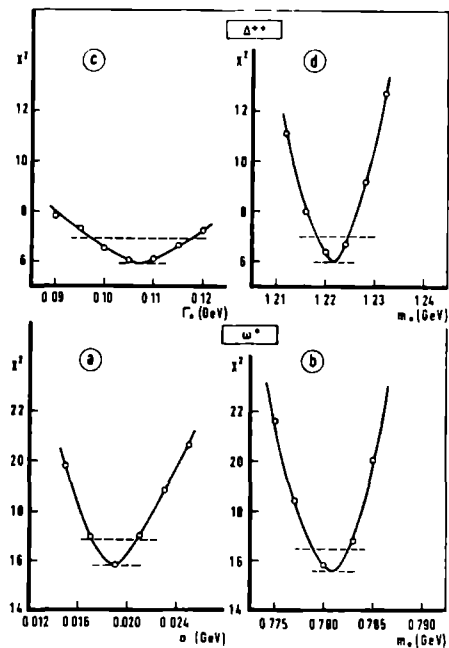


Fig. II.14.

Fig. II.14. De χ^2 van de aanpassing in het resonantie gebied als functie van de nominale waarden van de breedte (Γ_0) en de massa (m_0) van de resonanties. De horizontale lijnen geven de niveaus χ_{\min}^2 en $\chi_{\min}^2 + 1$ weer.

De t' -afhankelijkheid van het proces $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$ kan bij benadering worden voorgesteld door één rechte lijn in de $\ln \frac{d\sigma}{dt}$ verdeling (par.IV.f.1) met een helling van 4.3 $(\text{GeV})^{-2}$ zodat $f(t) \approx e^{4.5t}$. De gewichtsfactor $g(p\pi^+, \pi^+ \pi^- \pi^0)$ waarmee men eindtoestand (4) moet vermenigvuldigen verkrijgt men door in form. (II.3) voor $a = 4.5$ en $b = c = 0$ te substitueren.

II.e.3. Resultaten van de aanpassing.

Uit de aanpassing volgt dat er $(630 \pm 30) \Delta^{++} \omega^0$ ver-

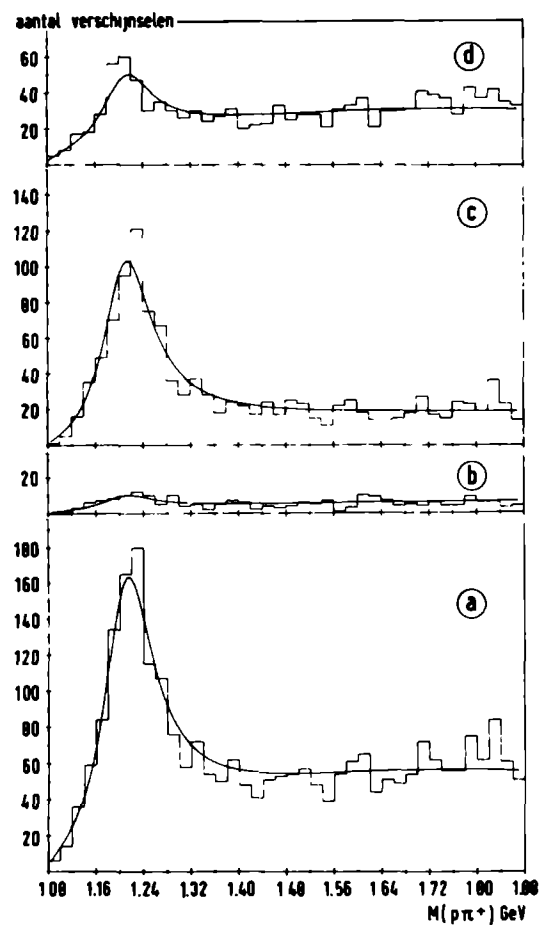


Fig. II.15.

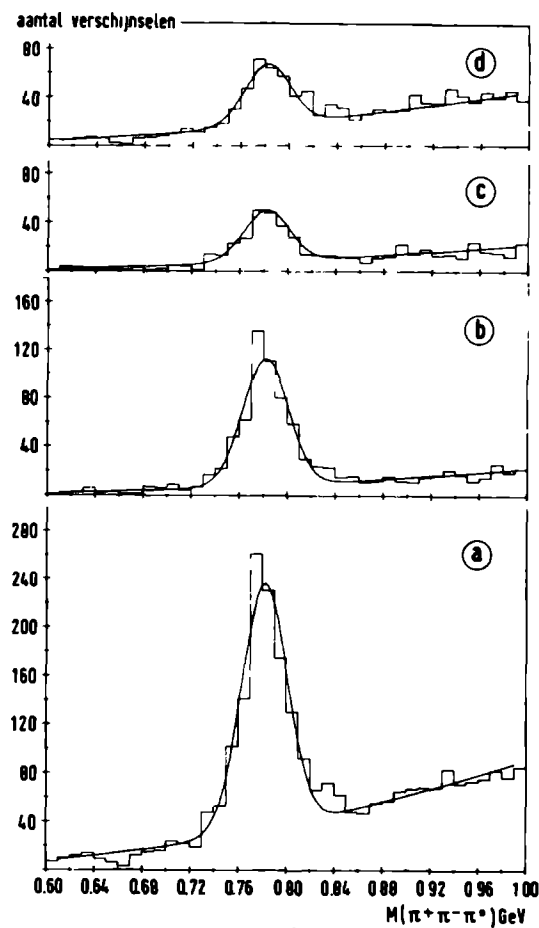


Fig. II.16.

Fig. II.15 en 16. Projecties van gedeelten van de $(p\pi^+, \pi^+\pi^-\pi^0)$ Goldhaber plot op de $p\pi^+$ resp. $\pi^+\pi^-\pi^0$ as. De getrokken lijnen zijn de projecties van de berekende verdelingsfunctie. Bijzonderheden zijn gegeven in tabel II.9.

schijnselen zijn, waarbij een - overigens kleine - correctie is toegepast voor de $\Delta^{++} \omega^0$ verschijnselen die buiten het rechthoekig gedeelte van de Goldhaber plot zijn gelegen. In fig. II.15^{a-d} worden de projecties van het door ons gebruikte gedeelte van de Goldhaber plot op de $m_{p\pi^+}$ as getoond voor verschillende $\pi^+ \pi^- \pi^0$ -massa intervallen en in fig. II.16^{a-d} evenzo de projecties op de $m_{\pi^+ \pi^- \pi^0}$ as voor verschillende $p\pi^+$ intervallen. In tabel II.9 zijn de massa intervallen waarop de figuren betrekking hebben aangegeven als ook de verhouding van de χ^2 van de berekende verdeling tot het aantal intervallen. Met uitzondering van fig. II.15^a (12 intervallen) ligt het aantal intervallen tussen 30 en 45 voor de verschillende figuren. Uit de χ^2 van de aanpassing en uit de figuren blijkt dat de aanpassing goed is.

Tabel II.9. χ^2/N van de aanpassing voor verschillende doorsneden van de Goldhaber plot.

	Projecties op de $(p\pi^+)$ as			
	$(\pi^+ \pi^- \pi^0)$ massa interval in GeV/c^2			
	.600-.740	.740-.820	.820-1.000	.600-1.000
fig.	15 ^b	15 ^c	15 ^d	15 ^a
χ^2/N	0,57	0,92	0,79	0,99

	Projecties op de $(\pi^+ \pi^- \pi^0)$ as			
	$(p\pi^+)$ massa interval in GeV/c^2			
	1.14-1.30	1.30-1.50	1.50-1.88	1.08-1.88
fig.	16 ^b	16 ^c	16 ^d	16 ^a
χ^2/N	1,19	0,79	0,96	1,10

II.f. Totale Δ^{++} , ω^0 en η^0 werkzame doorsnede.

a) De totale werkzame doorsneden voor Δ^{++} , ω^0 en η^0 productie zijn afgeleid door het aantal verschijnselen in de resonantie massa band te bepalen en dit te verminderen met het aantal verschijnselen in het aangrenzende gebied. Voor de η^0 en ω^0 die een geringe breedte hebben is geen correctie voor de uitlopers van de resonantie curve toegepast. Voor de Δ^{++} resonantie is de formule (II.5) gebruikt om hiervoor te corrigeren.

b) Tevens is het aantal η^0 en ω^0 verschijnselen geschat door een achtergrond kromme te tekenen in de $\pi^+\pi^-\pi^0$ massa verdeling en het aantal verschijnselen boven de achtergrond te tellen (fig. II.17^a). Een tweede schatting van de Δ^{++} productie is verkregen door de $p\pi^+$ massa verdeling aan te passen met de som van een geschatte achtergrond curve en een Breit-Wigner resonantie curve (fig. II.17^b).

De resultaten van beide schattingen zijn gegeven in tabel II.10.

Tabel II.10. Totaal aantal η^0 , ω^0 en Δ^{++} verschijnselen.

Resonantie	Resonantie gebied		Aangrenzen gebied		N_a	N_b
η^0	0,520-0,580	181	0,460-0,520 } 0,580-0,640 }	$x_2^1 = 74$	107 ± 15	110 ± 15
ω^0	0,700-0,860	2384	0,660-0,700 } 0,860-0,900 }	$x_2 = 1004$	1380 ± 70	1341 ± 70
Δ^{++}	1,14 -1,30	4264	1,06 -1,14 } 1,30 -1,38 }	1761	4060 ± 150	3450 ± 250

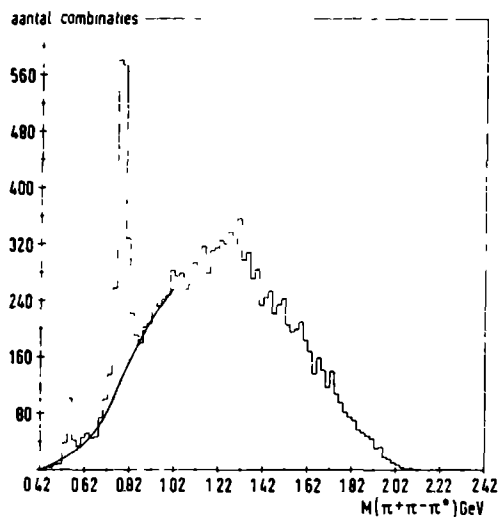


Fig. II.17a.

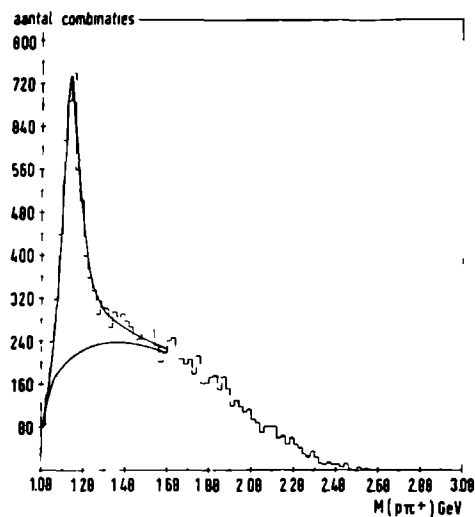


Fig. II.17b.

Fig. II.17. Links (17.a) de effectieve massa verdeling van het $\pi^+ \pi^- \pi^0$ systeem, rechts (17.b) de effectieve massa verdeling van het $p \pi^+$ systeem. Elk verschijnsel geeft twee bijdragen tot de histogrammen. De kromme in fig.a is de geschatte achtergrond curve. De krommen in fig.b zijn de geschatte achtergrond- en de achtergrond + $BW(\Delta^{++})$ curven.

Omdat de achtergrond onder de η^0 en ω^0 resonanties een bijna rechtlijnig verloop heeft, ligt de goede overeenstemming van N_a en N_b voor de hand. Voor de Δ^{++} resonantie is de schatting N_a die berust op de veronderstelling dat de achtergrond lineair verloopt, blijkbaar onjuist en moet de schatting N_b als meer betrouwbaar worden beschouwd. De fout op N_b is t.o.v. de fout op N_a - die zuiver statistisch is - verhoogd in verband met de onzekerheid omtrent de te gebruiken achtergrond curve.

Referenties.

- (1) D.R.O. Morrison, Physics Letters 22 (1966), 528.
- (2) D. Brown, G. Gidal, R.W. Birge, R. Bacastow, Sun Yui Tung,
W. Jackson, R. Pu, Phys. Rev. Letters 19 (1967), 664.
- (3) F.E. James and H.L. Kraybell, Phys. Rev. 142 (1966), 896.
- (4) J.W. Chapman, L.R. Fortney, E.C. Fowler, Phys. Rev. D3
(1971), 38.
- (5) K. Böckmann, B. Nellen, E. Paul, I. Borecka, J. Diaz,
U. Heeren, U. Liebermeister, E. Lohrmann, E. Raubold,
P. Söding, S. Wolff, S. Coletti, J. Kidd, L. Mandelli,
V. Pelosi, S. Ratti, L. Tallone,
Physics Letters 15 (1965), 356.
- (6) Aachen-Berlin-CERN collaboratie,
M. Aderholz et al. Nuclear Physics B8 (1968), 45.
- (7) G.S. Abrams, K.W.J. Barnham, W.R. Butler, D.G. Coyne,
G. Goldhaber, B.H. Hall and J. Naughton,
Phys. Rev. Letters 25 (1970), 617.
- (8) M. Ferro-Luzzi, R. George, Y. Goldschmidt-Clermont,
V.P. Henry, B. Jongejans, D.W. Leith, G.R. Lynch, F. Muller
and J.M. Perreau,
Nuovo Cimento 39 (1965), 417.
- (9) V. Alles-Borelli, B. French, Å. Frisk, L. Michejda,
Nuovo Cimento 48 (1967), 360.
- (10) Bonn-Durham-Nijmegen-Paris (E.P.)-Torino collaboratie,
K. Böckmann et al., Nuclear Physics B16 (1970), 221.
- (11) Bonn-Durham-Nijmegen-Paris (E.P.)-Torino collaboratie,
C.L. Pols et al., Nuclear Physics B25 (1971), 109.
- (12) Bonn-Durham-Nijmegen-Paris (E.P.)-Torino collaboratie
G. Rinaudo et al., Nuclear Physics B25 (1971), 351.

- (13) Particle Data Group, Rev. Mod. Phys. 42 (1970), 86.
- (14) CERN program library W505.
- (15) CERN program library D516.

III. Verband tussen Spintoestand en Vervalshoekverdeling van Resonanties.

Naast de totale werkzame doorsnede en de differentiële werkzame doorsnede worden de quasi twee-deeltjes reacties gekarakteriseerd door de spintoestanden van de uitgaande resonanties en de correlaties daartussen. Omdat het spin impuls-moment van een resonantie bij verval geheel of gedeeltelijk wordt omgezet in het ruimtelijk impulsmoment van de eindtoestand, verschaft de vervalshoekverdeling van een resonantie informatie omtrent de spintoestand van het betreffende deeltje. Hiertoe parametrizeert men de vervalshoekverdeling in een bepaald assenstelsel met de spin-dichtheidsmatrix⁽¹⁾ of statistische tensoren⁽²⁾, die de maximale informatie omtrent de spintoestand van een resonantie kunnen bevatten.

III.a. Assenstelsels.

Alle assenstelsels ten opzichte waarvan men de vervalshoekverdeling bepaalt, hebben gemeen dat ze gedefinieerd zijn in het rustsysteem van de resonantie en dat één van de assen samenvalt met de normaal \hat{n} op het productie vlak. De drie assen tesamen vormen een rechthoekig assenstelsel. De keuze van de tweede as geschiedt zodanig dat de parametrisatie van de hoekverdeling, afhankelijk van de te onderzoeken eigenschappen van de reactie zo eenvoudig mogelijk is.

De door ons gebruikte assenstelsels zijn:

1) Jackson en Heliciteitssysteem. In beide systemen kiest men als y-as de normaal op het productie vlak. In het Jackson systeem ligt de z-as in de richting van het inkomend π -meson voor de meson resonantie (M) en in de richting van het inkomend proton voor de baryon resonantie (B). In het Heliciteitssysteem ligt de z-as in de vliegrichting van de resonantie zelf. Omdat

deze richting in het rustsysteem van de resonantie niet is gedefinieerd kiest men hiervoor het tegengestelde van de richting van de andere resonantie die wordt geproduceerd.

2) Transversale systemen. De karakteristiek hiervan is dat de z-as loodrecht op het productie vlak staat. Al naar gelang de richting van de x-as is gedefinieerd, samenvallend met z-as van het Jackson- of Heliciteitssysteem onderscheiden we Transversaal Jackson systeem (TJ) en Transversaal Heliciteitssysteem (TH).

In fig. III.1. zijn de vier genoemde assenstelsels getekend in het rustsysteem van de meson resonantie. De derde as die met de twee getekende assen een rechtshandig assenstelsel vormt is weggelaten.

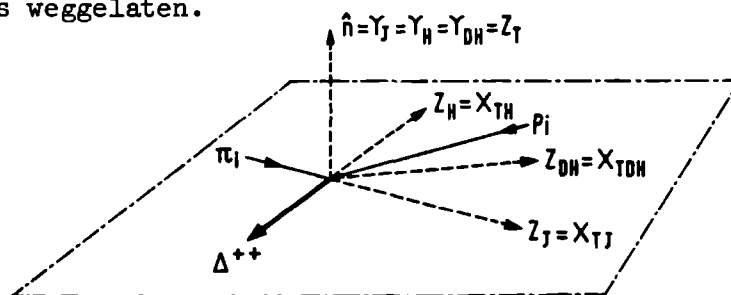


Fig.III.1. De diverse assenstelsels in het rustsysteem van de meson resonantie. \hat{n} is de normaal op het productie vlak. De as Z_J ligt in de vliegrichting van het inkomend pion, de as Z_H is tegengesteld aan de vliegrichting van de Δ^{++} . De hoek tussen de assen Z_{DH} en Z_J is de hoek θ_{DH} .

3) Donohue-Högaasen systeem.

Oorspronkelijk is dit nieuwe assenstelsel door Donohue en Högaasen ingevoerd om de spintoestand van een vector meson te analyseren⁽³⁾. Het wordt gedefinieerd als het assenstelsel waarin het reële gedeelte van de spin dichtheidsmatrix diagonaal is. Het blijkt dat de spin-dichtheidsmatrix diagonaal wordt als men in het assenstelsel dat t.o.v. het Jackson systeem over een bepaalde hoek θ_{DH} om de y-as is geroteerd, overgaat van de sphe-

rische op de Cartesische basis. Deze hoek θ_{DH} is afhankelijk van de spin-dichtheidsmatrix in het Jackson systeem. In tegenstelling tot de hierboven beschreven assenstelsels is dit systeem dus niet kinematisch bepaald, maar hangt af van de dynamica van het proces. De θ_{DH} die in fig. III.1. is getekend om het D-H systeem weer te geven is dan ook willekeurig gekozen.

Behalve in de door de auteurs uitgesproken verwachting dat door de spintoestand op deze wijze te beschrijven nieuw inzicht in de sterke wisselwerking wordt verkregen, ligt het belang van dit systeem in het feit dat aan de klasse C relaties van het quark model (zie Hfdst. VI) alleen voldaan kan worden als zowel voor de vector-meson resonantie als de baryon resonantie dit assenstelsel wordt gebruikt. Bovenstaande definitie geldt echter alleen voor vector meson resonanties. Om ook voor de Δ^{++} -resonantie een D-H systeem te kunnen invoeren, zijn we uitgegaan van een andere definitie, gebaseerd op de experimenteel gemeten vervalsverdeling (par. III.d.1).

III.b.1. De Vervalshoekverdeling uitgedrukt in de Elementen van de gecombineerde Spin-dichtheidsmatrix.

In het hierna volgende wordt de gecombineerde vervalshoekverdeling van een vector-meson ($J^P=1^-$) en de Δ^{++} -resonantie ($J^P=\frac{3}{2}^+$) besproken. De hoeken ϑ en φ welke voorkomen in de vervalshoekverdeling zijn de poolcoördinaten van de vervalsrichtingsvectoren van de betrokken resonanties t.o.v. de in de vorige paragraaf besproken assenstelsels. De poolcoördinaten van de vector-meson resp. Δ^{++} -richtingsvectoren worden onderscheiden door de indices α en β . De vervalsrichtingsvector is voor het verval $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ de richting van het π^+ meson in het ρ^0 rustsysteem en voor $\Delta^{++} \rightarrow p \pi^+$ de richting van het proton in het Δ^{++} rustsysteem. Overeenkomstig een uitbreiding van de methode van Gottfried en Jackson⁽⁴⁾ geldt voor het gecombineerde verval van twee resonanties c en d, geproduceerd in de reactie $a+b \rightarrow c+d$, waarbij de deeltjes c en d op hun beurt ieder naar twee deeltjes vervallen ($c \rightarrow \alpha+\gamma$, $d \rightarrow \beta+\delta$):

$$W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta) = \frac{d^2\sigma}{d\Omega_\alpha d\Omega_\beta} =$$

$$\sum_{\substack{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma, \lambda_\delta \\ m, m', n, n'}} |M_c(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma)|^2 \cdot |M_d(\lambda_\beta, \lambda_\delta)|^2 \cdot D_{m, \lambda}^{s_c}(\varphi_\alpha, \vartheta_\alpha, 0)^* \cdot D_{m', \lambda}^{s_c}(\varphi_\alpha, \vartheta_\alpha, 0) \cdot$$

$$\cdot D_{n, \mu}^{s_d}(\varphi_\beta, \vartheta_\beta, 0)^* \cdot D_{n', \mu}^{s_d}(\varphi_\beta, \vartheta_\beta, 0) \cdot \rho_{n n'}^{m m'} \quad (\text{III.1})$$

Hierbij zijn s_c en s_d de spins van de deeltjes c en d en $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma$ en λ_δ de helicitetoestanden van de deeltjes α, β, γ en δ . Voor λ en μ geldt:

$$\lambda = \lambda_\alpha - \lambda_\gamma$$

$$\mu = \lambda_\beta - \lambda_\delta$$

De definitie van de rotatie functies $D_{m', m}^j$ is gegeven door Rose⁽⁵⁾. Van de spin-dichtheidsmatrix elementen $\rho_{n n'}^{m m'}$ hebben de boven-indices betrekking op de spintoestand van deeltje c (vector meson) en de onder-indices op de spintoestand van deeltje d (baryon).

Uitgedrukt in de reactie amplituden $\langle m, n | T | \lambda_a, \lambda_b \rangle$ luidt de definitie van de spin-dichtheidsmatrix

$$\rho_{n n'}^{m m'} = \frac{1}{I_0} \sum_{\lambda_a, \lambda_b} \langle m, n | T | \lambda_a, \lambda_b \rangle \langle m', n' | T | \lambda_a, \lambda_b \rangle^* \quad (\text{III.2})$$

$$I_0 = \sum_{m, n, \lambda_a, \lambda_b} | \langle m, n | T | \lambda_a, \lambda_b \rangle |^2$$

$$\alpha) \text{ Voor de reactie } \pi^+ p \rightarrow \rho^0 \Delta^{++} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \pi^+ \pi^- \quad p \pi^+$$

is $s_\alpha = s_\gamma = s_\delta = 0$ en $s_\beta = \frac{1}{2}$. In dit geval hangen de vervalsamplituden $M_c(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma)$ en $M_d(\lambda_\beta, \lambda_\delta)$ niet af van de helicitetoestanden λ_α etc., en kunnen dus in de normalisatie constante van de hoekverdeling worden opgenomen⁽⁴⁾.

Indien de inkomende deeltjes niet gepolariseerd zijn, het productie proces pariteitsbehoudend is en de spin-quantisatie as (z-as) in het productie vlak ligt, zoals in het Jackson- en Heliciteitssysteem het geval is, geldt de relatie⁽⁶⁾:

$$\rho_{-n -n'}^{-m -m'} = (-1)^{m-m'+n-n'} \rho_{n n'}^{m m'} \quad (\text{III.3})$$

Gebruik makend van de hermiticiteit van de dichtheidsmatrix en de relatie (III.3) hebben Pilkuhn en Svensson⁽⁶⁾ de volgende hoekverdeling afgeleid uit formule (III.1):

$$W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta) = \\ \frac{1}{16\pi^2} [1 + A(\vartheta_\alpha) + B(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) + A(\vartheta_\beta) + B(\vartheta_\beta, \varphi_\beta) + A(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta) + B(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \varphi_\alpha) + \\ + B(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \varphi_\beta) + B(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \varphi_\alpha, \varphi_\beta)] \quad (\text{III.4})$$

met

$$\begin{aligned}
 A(\vartheta_\alpha) &= (1-3 \cos^2 \vartheta_\alpha) (\rho^{11}_{11}-\rho^{00}_{00}) \\
 A(\vartheta_\beta) &= (1-3 \cos^2 \vartheta_\beta) (\rho^{11}_{33}-\rho^{00}_{11}) \\
 A(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta) &= \frac{1}{2} (1-3 \cos^2 \vartheta_\alpha)(1-3 \cos^2 \vartheta_\beta)(\rho^{11}_{33}-\rho^{00}_{11}) \\
 B(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) &= -3[\sqrt{2} \sin 2\vartheta_\alpha \cos \varphi_\alpha \operatorname{Re}(\rho^{10}_{10}) + \sin^2 \vartheta_\alpha \cos 2\varphi_\alpha \rho^{1-1}_{1-1}] \\
 B(\vartheta_\beta, \varphi_\beta) &= -2\sqrt{3}[\sin 2\vartheta_\beta \cos \varphi_\beta \operatorname{Re}(\rho^{10}_{31}) + \sin^2 \vartheta_\beta \cos 2\varphi_\beta \operatorname{Re}(\rho^{0-1}_{3-1})] \\
 B(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \varphi_\alpha) &= \frac{3}{\sqrt{2}}(1-3 \cos^2 \vartheta_\beta)[\sin 2\vartheta_\alpha \cos \varphi_\alpha \operatorname{Re}(\rho^{10}_{10}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \vartheta_\alpha \cdot \\
 &\quad \cos 2\varphi_\alpha (\rho^{1-1}_{1-1})] \\
 B(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \varphi_\beta) &= -\sqrt{3}(1-3 \cos^2 \vartheta_\alpha)[\sin 2\vartheta_\beta \cos \varphi_\beta \operatorname{Re}(\rho^{10}_{31}) + \sin^2 \vartheta_\beta \cdot \\
 &\quad \cos 2\varphi_\beta \operatorname{Re}(\rho^{0-1}_{3-1})] \\
 B(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \varphi_\alpha, \varphi_\beta) &= 3\sqrt{3}\{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\vartheta_\alpha \sin 2\vartheta_\beta [\cos(\varphi_\alpha + \varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho^{10}_{31}-\rho^{0-1}_{31}) + \\
 &\quad + \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho^{01}_{31}-\rho^{-10}_{31})] + \\
 &\quad + \sin^2 \vartheta_\alpha \sin 2\vartheta_\beta [\cos(2\varphi_\alpha + \varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho^{1-1}_{31}) + \cos(2\varphi_\alpha - \varphi_\beta) \cdot \\
 &\quad \operatorname{Re}(\rho^{-11}_{31})] + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\vartheta_\alpha \sin^2 \vartheta_\beta [\cos(\varphi_\alpha + 2\varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho^{10}_{3-1}-\rho^{0-1}_{3-1}) + \\
 &\quad + \cos(\varphi_\alpha - 2\varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho^{01}_{3-1}-\rho^{-10}_{3-1})] + \\
 &\quad + \sin^2 \vartheta_\alpha \sin^2 \vartheta_\beta [\cos 2(\varphi_\alpha + \varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho^{1-1}_{3-1}) + \\
 &\quad \cos 2(\varphi_\alpha - \varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho^{-11}_{3-1})] \}
 \end{aligned}$$

De spin toestand van het baryon is weergegeven door $2n$ en $2n'$ (i.p.v. n en n' die halftallig zijn).

De dichtheidsmatrices van de afzonderlijke resonanties zijn verkregen door sommatie over de spintoestanden van de andere resonantie, zo geldt:

$$\rho^{m m'} = \sum_n \rho^{m m'}_{n n}$$

en

(III.5)

$$\rho_{n n'} = \sum_m \rho^{m m'}_{n n'}$$

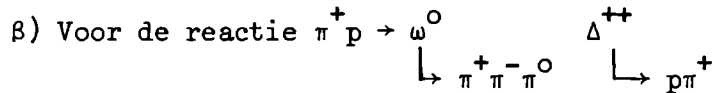
De afkortingen $\rho_{n n'}$ en $\rho^{m m'}_{n n'}$ betekenen:

$$\rho_{n n'} = \rho^{11}_{n n'} + \rho^{-1-1}_{n n'} - 2 \rho^{00}_{n n'}$$

$$\rho^{m m'}_{n n'} = \rho^{m m'}_{3 3} + \rho^{m m'}_{-3 -3} - \rho^{m m'}_{1 1} - \rho^{m m'}_{-1 -1}.$$

bovendien nog de spoorconditie:

(III.6)



moet men in de formule (III.1) enige wijzingen aanbrengen.

De eindtoestand van het verval $\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ wordt gekarakteriseerd door drie hoeken ϑ_α , φ_α en ψ , waarbij ϑ_α en φ_α de poolcoördinaten zijn van de normaal op het vervalvlak en ψ de oriëntatie van een der π -mesonen in het vervalvlak weergeeft. Tevens moet men om het impulsmoment van de eindtoestand volledig te beschrijven naast de z-component m nog een quantum getal k invoeren: k is de component van het impulsmoment langs de normaal op het vervalvlak⁽⁷⁾. Daarom moet men in formule (III.1)

$$|M_c(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma)|^2 D_{m, \lambda}^{Sc}(\varphi_\alpha, \vartheta_\alpha, 0)^* D_{m', \lambda}^{Sc}(\varphi_\alpha, \vartheta_\alpha, 0) \text{ vervangen door}$$

$$M_c(\lambda_{i,k}) M_c^*(\lambda_{i,k'}) D_{m,k}^{Sc}(\varphi_\alpha, \vartheta_\alpha, \psi)^* D_{m',k'}^{Sc}(\varphi_\alpha, \vartheta_\alpha, \psi)$$

waarbij $\lambda_1 (=0)$ de spin toestanden van de uitgaande π mesonen zijn. De ψ afhankelijkheid van elke term van de verdeling is $e^{i\psi(k-k')}$. Omdat bij het verval van een vector meson ($J^P = 1^-$) naar drie π -mesonen k en k' alleen de waarde nul kunnen aannemen⁽⁷⁾ is de hoekverdeling van het ω^0 verval dezelfde als bij het ρ^0 verval, indien men als vervalsrichtingsvector de normaal op het vervalvlak kiest. De normaal is gedefinieerd als het vector product van de π^- en π^0 impuls in het ω^0 ruststelsel.

III.b.2. Vervalshoekverdeling van de afzonderlijke resonanties
en correlatie termen.

De vervalshoekverdeling van het vector meson verkrijgt men

door $W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta)$ (form. III.4) te integreren over de ruimtehoek Ω_β :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\alpha} = W_1(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) = \frac{1}{4\pi} [1 + A(\vartheta_\alpha) + B(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)] .$$

Substitutie van $A(\vartheta_\alpha)$ en $B(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)$ geeft voor de vervalshoekverdeling van het vector meson:

$$W_1(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} [1 + (1 - 3 \cos^2 \vartheta)(\rho_{11}^{11} - \rho_{-1-1}^{00}) - 3\sqrt{2} \sin 2\vartheta \cos \varphi \operatorname{Re}(\rho_{31}^{10}) - 3 \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi \rho^{1-1}] \quad (\text{III.7})$$

Evenzo geeft integratie over Ω_α de vervalshoekverdeling voor de Δ^{++} :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\beta} = W_2(\vartheta_\beta, \varphi_\beta) = \frac{1}{4\pi} [1 + A(\vartheta_\beta) + B(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)] .$$

Expliciet geschreven is de Δ^{++} vervalshoekverdeling:

$$W_2(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} [1 + (1 - 3 \cos^2 \vartheta)(\rho_{33}^{33} - \rho_{11}^{11}) - 2\sqrt{3} \sin 2\vartheta \cos \varphi \operatorname{Re}(\rho_{31}^{31}) - 2\sqrt{3} \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi \operatorname{Re}(\rho_{3-1}^{3-1})] \quad (\text{III.8})$$

In het algemeen is er geen correlatie tussen het verval van het vector-meson en de Δ^{++} als de gecombineerde vervalshoekverdeling $W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta)$ geschreven kan worden als het product van de afzonderlijke hoekverdeling $W_1(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)$ en $W_2(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)$. Uit een vergelijking met de formule (III.4) voor de totale hoekverdeling ziet men dat de echte correlatie termen worden gevormd door de laatste 4 termen van (III.4) verminderd met het product⁽⁸⁾:

$$\frac{1}{16\pi^2} [A(\vartheta_\alpha) + B(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)] \cdot [A(\vartheta_\beta) + B(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)] \quad (\text{III.9})$$

Men beschrijft daarom de hoekverdeling (III.4), waarin 19 parameters voorkomen, ook wel met de 6 spin-dichtheidsmatrix elementen van de hoekverdelingen van de afzonderlijke resonanties en 13 correlatie termen C_7 t/m C_{19} . De laatsten zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}
 C_7 &= (\rho_{33} \overline{\rho_{11}}) & - 2(\rho^{11} \overline{\rho^{00}})(\rho_{33} \overline{\rho_{11}}) \\
 C_8 &= \text{Re } \rho^{10} & - 2\text{Re } \rho^{10} (\rho_{33} \overline{\rho_{11}}) \\
 C_9 &= \rho^{1-1} & - 2 \rho^{1-1} (\rho_{33} \overline{\rho_{11}}) \\
 C_{10} &= \text{Re } \rho_{31} & - 2(\rho^{11} \overline{\rho^{00}})\text{Re } \rho_{31} \\
 C_{11} &= \text{Re } \rho_{3-1} & - 2(\rho^{11} \overline{\rho^{00}})\text{Re } \rho_{3-1} \\
 C_{12} &= \text{Re}(\rho_{31}^{10} \overline{\rho_{31}^{0-1}}) & - 2\text{Re } \rho^{10} \text{Re } \rho_{31} \\
 C_{13} &= \text{Re}(\rho_{31}^{01} \overline{\rho_{31}^{-10}}) & - 2\text{Re } \rho^{10} \text{Re } \rho_{31} \\
 C_{14} &= \text{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}) & - \rho^{1-1} \text{Re } \rho_{31} \\
 C_{15} &= \text{Re}(\rho_{31}^{-11}) & - \rho^{1-1} \text{Re } \rho_{31} \\
 C_{16} &= \text{Re}(\rho_{3-1}^{10} \overline{\rho_{3-1}^{0-1}}) & - 2\text{Re } \rho^{10} \text{Re } \rho_{3-1} \\
 C_{17} &= \text{Re}(\rho_{3-1}^{01} \overline{\rho_{3-1}^{-10}}) & - 2\text{Re } \rho^{10} \text{Re } \rho_{3-1} \\
 C_{18} &= \text{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}) & - \rho^{1-1} \text{Re } \rho_{3-1} \\
 C_{19} &= \text{Re}(\rho_{3-1}^{-11}) & - \rho^{1-1} \text{Re } \rho_{3-1}
 \end{aligned}$$

III.b.3. Experimentele bepaling van de dichtheidsmatrices.

De hoekverdeling $W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta)$ van formule (III.4) is een som van onderling orthogonale functies $f_a(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta)$ elk vermenigvuldigd met een dichtheidsmatrix element ρ_a . Het moment van functie f_a , gedefinieerd als de integraal van het product van f_a en de hoekverdeling W over de gehele ruimte:

$$\int f_a \cdot W \cdot d\Omega_\alpha \cdot d\Omega_\beta$$

is dus gelijk aan

$$\rho_a \int f_a \cdot f_a \cdot d\Omega_\alpha \cdot d\Omega_\beta = \rho_a C_a \text{ (geen sommatie over } a)$$

waarbij $\frac{1}{\sqrt{C_a}}$ de normalisatie constante van de functie f_a is.

Laat $f_a(i) = f_a(\vartheta_{\alpha i}, \varphi_{\alpha i}, \vartheta_{\beta i}, \varphi_{\beta i})$ zijn waarbij $\vartheta_{\alpha i}$ etc. de waargenomen hoeken van het i^e verschijnsel zijn, dan is

$$\rho_a = \frac{1}{C_a} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_a(i) \quad (\text{III.10})$$

waarbij N het totaal aantal verschijnselen is.

De covariantie matrix E_{ab} is het moment van $f_a \cdot f_b$ om het product van de dichtheidsmatrix elementen ρ_a en ρ_b :

$$E_{ab} = \frac{1}{C_a C_b} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_a(i) f_b(i) - \rho_a \rho_b) \quad (\text{III.11})$$

De fout op ρ_a is gedefinieerd als $\sqrt{\frac{E_{aa}}{N}}$.

III.c.1. Vervalshoekverdeling uitgedrukt in Statistische Tensoren.

Door de D-functies voorkomende in form.(III.1) met behulp van Clebsch-Gordan coëfficiënten te koppelen en gebruik te maken van het verband tussen D-functies en bolfuncties kan men de hoekverdeling op eenvoudiger wijze schrijven als ⁽²⁾:

$$W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta) = \sum_{J_1 J_2} \sum_{M_1 M_2} F_c(J_1) F_d(J_2) T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} Y_{J_1}^{M_1}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)^* Y_{J_2}^{M_2}(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)^* \quad (\text{III.12})$$

waarbij

$$F_c(J) = \sqrt{\frac{4\pi}{2S_c+1}} \cdot \sum_{\lambda_\alpha \lambda_\gamma} |M_c(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma)|^2 C(S_c, \lambda; J, 0 | S_c, \lambda) \quad (\text{III.13})$$

$$F_d(J) = \sqrt{\frac{4\pi}{2S_d+1}} \sum_{\lambda_\beta \lambda_\delta} |M_d(\lambda_\beta, \lambda_\delta)|^2 C(S_d, \mu; J, 0 | S_d, \mu) \quad (\text{III.14})$$

$$\text{en } T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} = \sum_{\substack{m \ m' \\ n \ n'}} (-1)^{S_c + S_d + m + n - J_1 - J_2} C(S_c, -m; S_c, m' | J_1, M_1).$$

$$C(S_d, -n; S_d, n' | J_2, M_2) \rho_n^m \rho_{n'}^{m'} \quad (\text{III.15})$$

Uit de spoor conditie (III.6) en formule (III.15) volgt dat:

$$T_{00}^{00} = \frac{1}{\sqrt{2S_c+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2S_d+1}}$$

Uit de normalisatie van de hoekverdeling blijkt dat

$$F_c(0) \cdot F_d(0) = \frac{1}{4\pi},$$

$$\text{zodat } F_c(0) = \sqrt{\frac{2S_c+1}{4\pi}} \text{ en } F_d(0) = \sqrt{\frac{2S_d+1}{4\pi}} \quad (\text{III.16})$$

Uit de eigenschappen van de Clebsch-Gordan coëfficiënten welke voorkomen in formule (III.13) en (III.14) volgt dat J niet groter kan zijn $2S_c$ of $2S_d$. Bovendien moet J even zijn, want $M_c(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma)$ en $M_d(\lambda_\beta, \lambda_\delta)$ zijn, zoals bij formule (III.1) is opgemerkt, onafhankelijk van de helicitetoestanden λ_α etc., terwijl voor de Clebsch-Gordan coëfficiënten geldt:

$$C(S, \lambda; J, 0 | S, \lambda) = (-1)^J C(S, -\lambda; J, 0 | S, -\lambda)$$

Zowel voor het vector meson (c) als de Δ^{++} resonantie (d) kan J dus slechts de waarden 0 en 2 aannemen.

Vergelijking van form. (III.16) met (III.13) en (III.14) leert dat

$$\sum_{\lambda_\alpha, \lambda_\gamma} |M_c(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma)|^2 = \frac{2S_c + 1}{4\pi}$$

$$\text{en} \quad \sum_{\lambda_\beta, \lambda_\delta} |M_d(\lambda_\beta, \lambda_\delta)|^2 = \frac{2S_d + 1}{4\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{Hieruit volgt dat} \quad F_c(2) &= -\sqrt{\frac{3}{10\pi}} \\ F_d(2) &= -\sqrt{\frac{1}{5\pi}} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Door gebruik te maken van de relatie

$$(T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2})^* = (-1)^{M_1 + M_2} T_{-M_1 -M_2}^{J_1 J_2}, \quad (\text{III.18})$$

welke voortvloeit uit de relatie (III.15) en de hermiticiteit van de dichtheidsmatrix, kan men de hoekverdeling verder vereenvoudigen tot:

$$W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta) = \frac{1}{16\pi^2} + F_c(0)F_d(2) \sum_{M=0,2} T_{0M}^{02} Y_0^0 (\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)^* Y_2^M(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)^*$$

$$\begin{aligned}
& + F_c(2)F_d(0) \sum_{M=0,2} T_{M0}^2 Y_2^M(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)^* Y_0^0(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)^* \\
& + F_c(2)F_d(2) T_{00}^2 Y_2^0(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)^* Y_2^0(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)^* \\
& + 2F_c(2)F_d(2) \operatorname{Re} \left\{ \sum_{M_1} \sum_{M_2} T_{M_1 M_2}^2 Y_2^{M_1}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)^* Y_2^{M_2}(\vartheta_\beta, \varphi_\beta)^* \right\}
\end{aligned}
\tag{III.19}$$

waarbij in de laatste sommatie voor $M_1=0$ M_2 de waarden 1 en 2 aanneemt en voor $M_1=1$ of 2, M_2 de waarden -2 t/m $+2$ doorloopt. In totaal wordt de hoekverdeling door 19 i.h.a. complexe statistische tensoren bepaald. Uit de relatie (III.3), welke voor de dichtheidsmatrix elementen geldt indien de inkomende deeltjes niet gepolariseerd zijn en het productie proces pariteitsbehoudend is, volgt dat in het Jackson- of heliciteitssysteem geldt:

$$T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} = (-1)^{J_1 + J_2 - M_1 - M_2} T_{-M_1 - M_2}^{J_1 J_2} \tag{III.20}$$

Gecombineerd met de formule (III.18) volgt hieruit dat in deze assenstelsels de statistische tensoren reëel zijn, daar $J_1 + J_2$ even is.

In de transversale assenstelsels luidt het equivalent van relatie (III.3)

$$\rho_{n n'}^{m m'} = 0 \quad \text{indien } |m - m' + n - n'| \text{ oneven is}^{(9)}.$$

Voor de statistische tensoren betekent dit

$$T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} = 0 \quad \text{als } |M_1 + M_2| \text{ oneven is.} \tag{III.21}$$

Van de elf overblijvende statistische tensoren zijn er drie reëel (T_{00}^{02} , T_{00}^{20} en T_{00}^{22}) op grond van relatie (III.18) en acht complex (T_{22}^{22} , T_{2-2}^{22} , T_{20}^{22} , T_{02}^{22} , T_{11}^{22} , T_{1-1}^{22} , T_{02}^{02} en T_{20}^{20}), zodat ook in het transversale systeem de hoekverdeling door 19 reële parameters is bepaald.

Uit de transformatie eigenschappen⁽⁵⁾ van de spherische harmonische Y_J^M volgt - aangezien de hoekverdeling rotatie-invariant is - dat voor de statistische tensoren geldt:

$$(T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2})' = \sum_{M_1' M_2'} D_{M_1' M_1}^{J_1} (R_1) D_{M_2' M_2}^{J_2} (R_2) T_{M_1' M_2'}^{J_1 J_2} \quad (\text{III.22})$$

waarbij R_1 en R_2 de rotaties van resp. het meson- en baryon assenstelsel zijn. Door het bestaan van deze relatief eenvoudige transformatie formule (speciaal als men in een transversaal assenstelsel rotaties in het productie vlak beschouwt) biedt het gebruik van statistische tensoren i.p.v. spindichtheidsmatrices soms voordelen, ook al is het verband tussen statistische tensoren en de spintoestand van een resonantie ingewikkelder.

III.c.2. Experimentele bepaling van de statistische tensoren.

De statistische tensoren worden experimenteel op dezelfde wijze bepaald als de dichtheidsmatrices (par. III.b.3). Omdat de spherische harmonischen onderling orthonormaal zijn, geldt dat:

$$T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} = \frac{1}{F_C(J_1) F_D(J_2)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_{J_1}^{M_1}(i) Y_{J_2}^{M_2}(i) \quad (\text{III.23})$$

met N als het totaal aantal verschijnselen en $Y_J^M(i) = Y_J^M(\cos \vartheta_i, \varphi_i)$.

III.d.1. Enkelvoudige Vervalshoekverdeling uitgedrukt in de Donohue-Högaasen Parameters.

Om behalve voor de vector meson resonanties ook voor de Δ^{++} resonantie een D-H systeem in te voeren, definiëren we dit als het assenstelsel waarin de hoekverdeling op zijn hoofdassen is getransformeerd, i.p.v. de spin-dichtheidsmatrix.

Gaat men in het Jackson systeem van poolcoördinaten over op cartesische coördinaten dan worden de vervalshoekverdelingen van het vector meson (form. III.7) en Δ^{++} -resonantie (form. III.8) kwadratische vormen in p_x , p_y en p_z , de projecties van de vervalsrichtingsvector op de x-, y- en z-as.

Bij een passieve pariteitsoperatie toegepast op het assenstelsel waarin de impulsvectoren zijn gedefinieerd van de inkomende en uitgaande deeltjes wordt de y-as van het Jackson systeem, die de normaal op het productie vlak is, gespiegeld. De richtingen van de x- en z-as die direct samenhangen met de impulsvectoren blijven ongewijzigd. De spinvectoren worden eveneens gespiegeld. Zijn de inkomende deeltjes niet gepolariseerd dan moet op grond van pariteitsbehoud bij sterke wisselwerkingen de vervalshoekverdeling invariant zijn voor deze transformatie. Hieruit volgt dat de gemengde termen $p_x \cdot p_y$ en $p_z \cdot p_y$, die bij deze transformatie van teken veranderen niet in de kwadratische vorm mogen voorkomen. Een rotatie om de y-as over een hoek θ_{DH} volstaat dus om de kwadratische vorm op zijn hoofdassen te transformeren.

De vervalshoekverdelingen in het Jackson systeem, uitgedrukt in p_x , p_y en p_z , voor het vector meson:

$$\frac{3}{4\pi} [\rho^{00} p_z^2 + (\rho^{11} + \rho^{1-1}) p_y^2 + (\rho^{11} - \rho^{1-1}) p_x^2 - 2\sqrt{2} \operatorname{Re}(\rho^{10}) p_x p_z]$$

en voor de Δ^{++} :

$$\frac{1}{4\pi} [4\rho_{11}p_z^2 + (\rho_{11}+3\rho_{33}+2\sqrt{3}\operatorname{Re}(\rho_{3-1}))p_y^2 + (\rho_{11}+3\rho_{33}-2\sqrt{3}\operatorname{Re}(\rho_{3-1}))p_x^2 - 4\sqrt{3}(\operatorname{Re}\rho_{31})p_xp_z]$$

gaan in het D.-H. systeem, door een rotatie over θ_{DH} om de y-as over in

$$W = \frac{3}{4\pi} [\alpha p_x^2 + \beta p_y^2 + \gamma p_z^2] \quad (\text{III.24})$$

Omdat (III.24) een waarschijnlijkheidsverdeling voorstelt moeten α , β en γ positief zijn en normalisatie van de verdeling geeft de relatie:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (\text{III.25})$$

Uitgedrukt in de spindichtheidsmatrix elementen zijn de waarden van α, β, γ en θ_{DH} gegeven in Tabel III.2.

Tabel III.2. De Donohue-Högaasen parameters uitgedrukt in spin-dichtheidsmatrix elementen.

	vector meson	Δ^{++}
β	$\rho^{11} + \rho^{1-1}$	$\frac{1}{3} (\rho_{11} + 3\rho_{33} + 2\sqrt{3}\operatorname{Re}\rho_{3-1})$
α	$\frac{1}{2}(1-\beta-S\sqrt{(\rho_{00}-\rho^{11}+\rho^{1-1})^2+8(\operatorname{Re}\rho^{10})^2})$	$\frac{1}{2}(1-\beta-S'\sqrt{(-\rho_{33}+\rho_{11}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Re}\rho_{3-1})^2+\frac{16}{3}(\operatorname{Re}\rho_{31})^2})$
γ	$\frac{1}{2}(1-\beta+S\sqrt{(\rho_{00}-\rho^{11}+\rho^{1-1})^2+8(\operatorname{Re}\rho^{10})^2})$	$\frac{1}{2}(1-\beta+S'\sqrt{(-\rho_{33}+\rho_{11}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Re}\rho_{3-1})^2+\frac{16}{3}(\operatorname{Re}\rho_{31})^2})$
$\operatorname{tg}2\theta_{DH}$	$\frac{-2\sqrt{2}\operatorname{Re}\rho^{10}}{\rho_{00}-\rho^{11}+\rho^{1-1}}$ $S = \text{teken van } (\rho_{00}-\rho^{11}+\rho^{1-1})$	$\frac{-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{Re}\rho_{31}}{-\rho_{33}+\rho_{11}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Re}\rho_{3-1}}$ $S' = \text{teken van } (\rho_{11}-\rho_{33}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Re}\rho_{3-1})$

III.d.2. Bepaling van α, β, γ en θ_{DH} in het Donohue-Högaasen systeem.

De waarden van de D.-H. parameters en hun fouten zijn op twee verschillende wijzen berekend. Ten eerste zijn de D.-H. parameters bepaald uit de spin dichtheidsmatrix elementen, zoals die in het Jackson systeem zijn berekend. Hierbij is gebruik gemaakt van de formules uit Tabel III.2. Een tweede maal zijn de D.-H. parameters bepaald uit de Meest Aannemelijke Aanpassing van formule (III.24) aan de experimentele hoekverdelingen. Omdat voor één verschijnsel het D.-H. systeem niet gedefinieerd is moet men, om een aannemelijkheidsfunctie op te kunnen stellen, de hoekverdeling (III.24) uitdrukken in variabelen die in het Jackson systeem zijn gedefinieerd. Dit leidt tot:

$$W(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} [\alpha(\sin \vartheta \cos \varphi \cos \theta_{DH} - \cos \vartheta \sin \theta_{DH})^2 + \beta(\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + \gamma(\sin \vartheta \cos \varphi \sin \theta_{DH} + \cos \vartheta \cos \theta_{DH})^2] \quad (\text{III.26})$$

Minimalisatie van de logaritmische Aannemelijkheidsfunctie L:

$$L = - \sum_{i=1}^N \ln(W(i)) \quad N = \text{aantal verschijnselen.}$$

in functie van de parameters α, β, γ en θ_{DH} , geeft de beste schatting van deze parameters en hun fouten. $W(i)$ is de waarde van W die men verkrijgt door in het rechterlid van (III.26) de hoeken ϑ_i en φ_i van het i^e verschijnsel te substitueren.

Het blijkt dat beide methoden ongeveer dezelfde waarden van de D.-H. parameters en hun fouten opleveren. Ongeveer wil in dit verband zeggen dat de onderlinge afwijkingen veel kleiner zijn dan de berekende fouten. Dit betekent tevens dat de methode der momenta (par. III.b.3 en III.c.2) bij de bepaling van spin-dichtheidsmatrix elementen en hun fouten even nauwkeurig is als de M.A.A. methode.

Referenties

- 1) U. Fano, Reviews of Modern Physics, 29 (1957), 74.
- 2) A. Kotánski and K. Zalewski, Nuclear Physics, B4 (1968), 559.
- 3) J.T. Donohue and H. Högaasen, Physics Letters, 25B (1967), 554.
- 4) K. Gottfried and J.D. Jackson, Nuovo Cimento, 33 (1964), 309.
- 5) M.E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley & Sons. Inc, New York, (1963).
- 6) H. Pilkuhn and B.E.Y. Svensson, Nuovo Cimento, 38 (1965), 518.
- 7) S.M. Berman and M. Jacob, Phys. Rev. 139 (1965), 1023.
- 8) J.T. Donohue, Nuovo Cimento, 52A (1967), 1152.
- 9) R.H. Capps, Phys. Rev., 122 (1961), 929.

IV. Differentiële werkzame doorsnede en vervalshoekverdeling van de quasi twee deeltjes reacties.

In dit hoofdstuk worden de experimentele resultaten met betrekking tot de vervalshoekverdelingen en de differentiële werkzame doorsneden gegeven. Van de twee reacties $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ en $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$ is de gecombineerde hoekverdeling $W(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha; \vartheta_\beta, \varphi_\beta)$ bepaald in het Jackson systeem en de transversale systemen van de resonanties. De hoekverdeling t.o.v. het Jackson systeem is geparametriseerd met de gecombineerde spin-dichtheidsmatrix. De hoekverdelingen t.o.v. de transversale systemen zijn uitgedrukt in statistische tensoren. De D.-H. parameters worden voor elke resonantie afzonderlijk gegeven als functie van de gereduceerde impulsoverdracht $t'(p, \Delta^{++})$.

Voor de reacties $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f^0$ en $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$ zijn de vervalshoekverdelingen van de afzonderlijke resonanties alleen in het Jackson systeem van de betreffende resonantie bepaald. De vervalshoekverdeling van de Δ^{++} is voor beide reacties geparametriseerd met de spin-dichtheidsmatrix. Een dergelijke parametrisatie is voor de meson resonanties achterwege gelaten omdat de η^0 een pseudo scalair meson is en bij de f^0 de diagonaal elementen van de spin-dichtheidsmatrix niet betrouwbaar te bepalen zijn (par. IV.a.3).

Van alle vier reacties wordt de differentiële werkzame doorsnede als functie van $t'(p, \Delta^{++})$ gegeven.

IV.a.1. Het 4C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$.

In dit kanaal komen de reacties $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ en $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f^0$ voor. Bij de bepaling van de differentiële werkzame doorsnede en de spintoestand van de resonanties is gebruik gemaakt van die verschijnselen waarvan de effectieve massa van de vervalproducten in het massagebied van de betreffende resonantie is gelegen.

De grenzen van dit massagebied zijn voor de verschillende resonanties gegeven in tabel IV.1.

Tabel IV.1. Gebruikte massa-intervallen voor de verschillende resonanties.

Resonantie	Massa interval in (GeV)
Δ^{++}	1,14 - 1,30
ρ^0	0,66 - 0,86
f^0	1,16 - 1,36
η^0	0,535- 0,565
ω^0	0,740- 0,820

Bij sommige verschijnselen voldeden de twee combinaties ($p\pi_1^+, \pi_2^+\pi^-$) en ($p\pi_2^+, \pi_1^+\pi^-$) beide aan hetzelfde massa criterium: 6 verschijnselen hadden beide combinaties in het $\Delta^{++}\rho^0$ massagebied en 13 verschijnselen hadden beide combinaties in het $\Delta^{++}f^0$ massagebied. Bij deze verschijnselen is die combinatie gekozen welke de kleinste $t'(p, p\pi^+)$ had.

Van 16 verschijnselen lag één combinatie in het $\Delta^{++}\rho^0$ massagebied en de andere in het $\Delta^{++}f^0$ massagebied. Deze ambiguïteit is slechts gedeeltelijk opgelost: alle 16 zijn als $\Delta^{++}\rho^0$ verschijnselen opgevat en 4 ervan óók als $\Delta^{++}f^0$ verschijnselen. Van deze 4 was de $t'(p, p\pi^+)$ van de combinatie gelegen in het $\Delta^{++}f^0$ massagebied kleiner dan van de combinatie in het $\Delta^{++}\rho^0$ massagebied.

In totaal zijn 1249 verschijnselen uit het $\Delta^{++}\rho^0$ massagebied gebruikt en 431 verschijnselen uit het $\Delta^{++}f^0$ massagebied. Het aantal ambigue verschijnselen is bij gevolg kleiner dan 2% voor de $\Delta^{++}\rho^0$ steekproef en kleiner dan 4% voor de $\Delta^{++}f^0$ steekproef.

IV.a.2. De achtergrond in het $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}f^0$ gebied.

Volgens de resultaten van Hfdst. II is de achtergrond in het $\Delta^{++}\rho^0$ gebied ongeveer 15%, waarvan 8% $\Delta^{++}\pi^+\pi^-$ en 4% $p\pi^+\rho^0$.

In het $\Delta^{++}f^0$ gebied bedraagt de achtergrond ongeveer 40%, waarvan meer dan de helft $\Delta^{++}\pi^+\pi^-$.

Op de in dit hoofdstuk gegeven resultaten is geen correctie toegepast voor de achtergrond. De reden is dat hierdoor de verkregen resultaten veelal weinig worden beïnvloed en de statistische fouten aanzienlijk worden vergroot. Bovendien kan men zich afvragen of de gebruikelijke methode van achtergrond correctie wel zinvol en juist is. De gebruikelijke procedure om voor achtergrond te corrigeren is dat men de hoekverdeling van verschijnselen uit massagebieden gelegen rondom het dubbel resonantie gebied aftrekt van de oorspronkelijke hoekverdeling. Hierbij kiest men deze gebieden bij voorkeur zó dat ze geen of weinig dubbel resonantie verschijnselen bevatten. De veronderstellingen die aan deze methode ten grondslag liggen zijn dat de hoekverdeling in deze gebieden dezelfde is als van de achtergrond in het dubbel resonantie gebied en dat de achtergrond incoherent is met de dubbel resonantie productie. Voor brede resonanties als de Δ^{++} , ρ^0 en f^0 liggen de gebieden waar weinig dubbel resonantie productie voorkomt, zó ver van het centrale gebied verwijderd dat de eerste veronderstelling twijfelachtig wordt. Nog afgezien van diverse theoretische argumenten⁽¹⁴⁾ blijkt uit de vervalshoekverdeling van de ρ^0 en f^0 dat ook de tweede veronderstelling niet juist is, maar dat er daarentegen interferentie optreedt tussen de achtergrond en de dubbel resonantie productie. Voor wat betreft de achtergrond correctie op de differentiële werkzame doorsnede en de daarmee verbonden moeilijkheden wordt verwezen naar ref.(2) en (3).

IV.a.3. Interferentie met de achtergrond.

Naar aanleiding van het verschil tussen de effectieve massa verdelingen van het $\pi^+\pi^-$ systeem voor verschijnselen met resp. positieve en negatieve waarden van de Jackson hoek $\cos \vartheta_+$ in het dipion rustsysteem (fig. II.2^a en II.2^b) is reeds in Hfdst. II op het bestaan van interferentie gewezen. Wat ons hier in de eerste plaats bezig houdt is in hoeverre deze interferentie de bepaling van de spindichtheidsmatrices van de processen $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}f^0$ bemoeilijkt. Hiertoe zijn in fig. IV.1a t/m d de verwachtingswaarden van de bolfuncties $Y_l^0(\cos \vartheta_+)$ voor $l=1,2,3$ en 4 uitgezet in functie van de effectieve massa van het $\pi_2^+\pi^-$ systeem, voor die verschijnselen waarvan de $p\pi_1^+$ massa in het Δ^{++} massagebied is gelegen én $t' \leq 0,4 \text{ GeV}^2$ is.

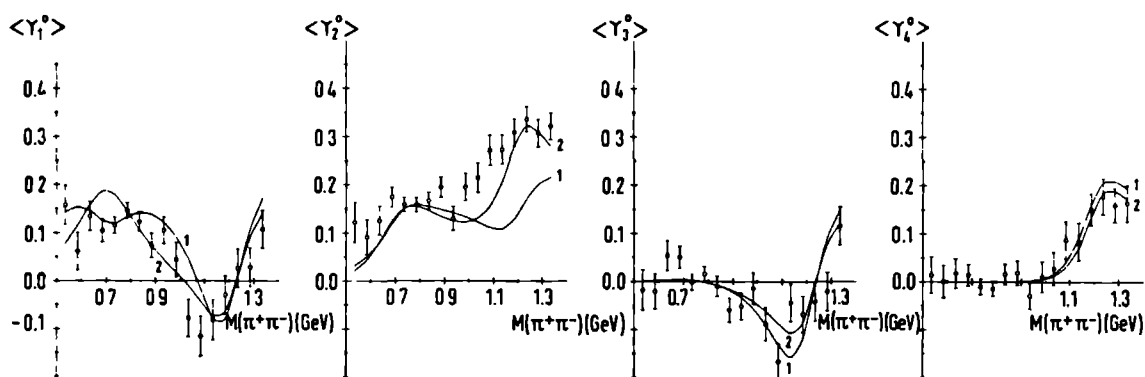


Fig. IV.1. Verwachtingswaarden van de bolfuncties Y_l^0 ($l=1,2,3$ en 4) als functie van de massa van het dipion systeem.

Met behulp van de formules voor de vervalshoekverdeling van een zuiver ρ^0 meson (form. III.9) en f^0 meson⁽⁴⁾, kan men de verwachtingswaarden van de bolfuncties uitdrukken in de spin-dichtheidsmatrix elementen van deze resonanties (Tabel IV.2).

Tabel IV.2. Verwachtingswaarden van de bolfuncties Y_1^0 voor ρ^0 en f^0 verval uitgedrukt in spin dichtheidsmatrix elementen.

Reso- nantie	$\langle Y_1^0 \rangle$	$\langle Y_2^0 \rangle$	$\langle Y_3^0 \rangle$	$\langle Y_4^0 \rangle$
ρ^0	-	$\frac{1}{\sqrt{5\pi}} (\rho^{00}_{-\rho^{11}}) \approx$ $0,25 (\rho^{00}_{-\rho^{11}})$	-	-
f^0	-	$\frac{5}{7} \frac{1}{\sqrt{5\pi}} (\rho^{00}_{+\rho^{11}} - 2\rho^{22})$ $\approx 0,18(\rho^{00}_{+\rho^{11}} - 2\rho^{22})$	-	$\frac{3}{7} \frac{1}{\sqrt{\pi}} [(\rho^{00}_{-\rho^{11}}) + \frac{1}{3}(\rho^{22}_{-\rho^{11}})]$ $\approx 0,24 [(\rho^{00}_{-\rho^{11}}) + \frac{1}{3}(\rho^{22}_{-\rho^{11}})]$

Vergelijkt men de experimenteel gevonden verwachtingswaarden van de bolfuncties met tabel IV.2 dan valt op dat in het ρ^0 massagebied de $\langle Y_1^0 \rangle$ duidelijk van nul verschilt en dat in het f^0 massagebied de $\langle Y_2^0 \rangle$ veel groter is dan de waarde uit Tabel IV.2: $0,32 \pm 0,02$ tegenover maximaal 0,18 in de tabel.

Beide verschijnselen laten zich min of meer verklaren door te veronderstellen dat er interferentie optreedt met een achtergrond reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \pi^+ \pi^-$ waarbij de twee pionen zich in een relatieve S-golf toestand bevinden. De krommen die in fig. IV.1 zijn getekend, zijn voorspellingen van de verwachtingswaarden van Y_1^0 op grond van een eenvoudig model. Men veronderstelt dat de π - π verstrooiing aan de bovenste vertex (fig. IV.2) beschreven kan worden door de som van een S-, P- en D-golf, waarbij de S- en D-golf een isospin 0 en de P-golf een isospin 1 bezitten. Er is geen rekening gehouden met de "off mass shell" correcties⁽⁵⁾ van het uitgewisselde

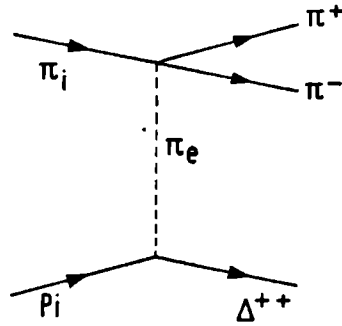


Fig. IV.2. De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \pi^+ \pi^-$ veroorzaakt gedacht door π -uitwisseling.

pion (π_e), die voor S-, P- en D-golven verschillen, noch met absorptie effecten (zie Hfdst. V).

In het dipion systeem is de hoekverdeling van $\cos \vartheta_{\pi^+}$ dan te schrijven als:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \vartheta_{\pi^+}} \sim \int |a_0 Y_0^0(\cos \vartheta_{\pi^+}) + a_1 Y_1^0(\cos \vartheta_{\pi^+}) + a_2 Y_2^0(\cos \vartheta_{\pi^+})|^2 d\varphi$$

$$\text{met } a_1 = C_1 \frac{(\eta_1 e^{2i\delta_1} - 1)}{2i} \quad (\text{IV.1})$$

Hierin is η_1 de elasticiteitscoëfficiënt van de betreffende golf, δ_1 de fase hoek en C_1 een constante die van de impuls-moment en isospin toestand van de golf afhangt (Tabel IV.3).

Voor de P- en D-golf is aangenomen dat hun elasticiteit $\eta_1=1$ is, en dat ze voorgesteld kunnen worden door resp. de ρ^0 en f^0 Breit-Wigner resonantie amplituden, zodat voor δ_1 en δ_2 geldt:

$$\text{tg } \delta_1 = \frac{m_0 \Gamma(m)}{m_0^2 - m^2} \quad (\text{IV.2})$$

Hierin is m de effectieve massa van het dipion systeem en $\Gamma(m) = \Gamma_0 \cdot f(m)$, de in Appendix A1 gedefinieerde breedte van de beschouwde resonanties. De gebruikte waarden van m_0 en Γ_0 voor de resonanties ρ^0 en f^0 zijn gegeven in tabel IV.3.

Tabel IV.3. De waarden van de constanten voorkomende in de formules IV.1 en IV.2 voor de resonerende S-, P- en D-golven.

l	Resonantie	C_l	m_0 (GeV)	Γ_0 (GeV)
0	S^0	$\frac{1}{3}$	0,680	0,310
1	ρ^0	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	0,765	0,140
2	f^0	$\frac{1}{3} \sqrt{5}$	1,260	0,140

Omtrent de S-golf zijn twee verschillende veronderstellingen gemaakt. De eerste veronderstelling is dat ook de S-golf door een resonantie amplitude (form. IV.2) kan worden beschreven. De parameters, gegeven in tabel IV.3, zijn ontleend aan een studie van hetzelfde verschijnsel optredend in de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \pi^+ \pi^-$ bij een bundel impuls van 8 GeV/c⁽⁶⁾.

De tweede veronderstelling omtrent de S-golf is gebaseerd op de resultaten die men voor het gedrag van de S-golf in het f^0 -gebied heeft verkregen⁽⁷⁾. Het gevonden verloop van zowel η_0 als δ_0 als functie van m is door ons geschematiseerd tot een gebroken rechte lijn, getoond in fig. IV.3.

In een model met zuivere pion-uitwisseling worden alle resonanties in een spin toestand $m_z=0$ t.o.v. het Jackson systeem geproduceerd. Bekend is echter (zie tabel IV.5) dat voor de ρ^0 productie het spindichtheidsmatrix element $\rho^{00} \approx 0,3$ en bij gevolg $\rho^{11} = \rho^{-1-1} = 0,1$ is. Om het model

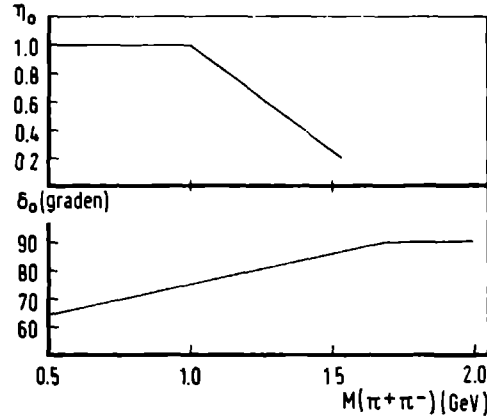


Fig. IV.3. De faseverschuiving (δ_0) en de elasticiteit (η_0) van de S-golf, als functie van de dipion massa. Deze waarden zijn gebruikt om kromme (2) van Fig. IV.1 te berekenen.

iets realistischer te maken is in form. (IV.1) de term $a_1 Y_1^0(\cos \vartheta_{\pi^+})$ vervangen gedacht door de uitdrukking:

$$a_1 [\sqrt{0,8} Y_1^0 + \sqrt{0,1} Y_1^1 + \sqrt{0,1} Y_1^{-1}].$$

De krommen 1) en 2) in fig. IV.1a t/m d zijn berekend met de eerste resp. tweede veronderstelling aangaande de S-golf. Met uitzondering van het gedrag van $\langle Y_2^0 \rangle$ in het f^0 -massagebied (rond 1,26 GeV) verschillen beide krommen in de diverse figuren niet veel en zijn zij, althans kwalitatief, in overeenstemming met de experimentele waarden. In het f^0 -gebied is alleen de kromme 2) - d.w.z. de fase van de S-golf is ongeveer 90° - in overeenstemming met de waarnemingen.

Deze interferentie met de S-golf achtergrond heeft geheel verschillende consequenties voor de bepaling van de ρ^0 en f^0 spin dichtheidsmatrices. In het geval van de ρ^0 heeft de S-golf achtergrond weinig invloed op de bepaling van de spindichtheidsmatrix elementen omdat bij de interferentie van de twee golven, die tegengestelde pariteit hebben, de vervalshoekverdeling beschreven kan worden door aan de form. (III.9) voor het ρ^0 ver-

val extra termen toe te voegen die orthogonaal zijn t.o.v. de oorspronkelijke verdeling (zie verder par. IV.b.4).

Bij het f^0 -verval moet men, zoals uit het gedrag van $\langle Y_2^0 \rangle$ is gebleken, veronderstellen dat er maximale interferentie is met de S-golf. Hierdoor ontstaan interferentie termen - b.v. Y_2^0 - die niet orthogonaal zijn t.o.v. de oorspronkelijke verdeling, waardoor het niet zonder meer mogelijk is de diagonaal elementen van de f^0 spin dichtheidsmatrix te bepalen.

IV.b. De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$.

IV.b.1. De $\frac{dN}{dt'}$ Verdeling.

De $\frac{dN}{dt'}$ verdeling (fig. IV.4) kan niet door één enkele e-macht beschreven worden⁽³⁾, maar wel door de som van twee exponentiële functies:

$$\frac{dN}{dt'} = B_1 e^{-\lambda_1 t'} + B_2 e^{-\lambda_2 t'} \quad (\text{IV.3})$$

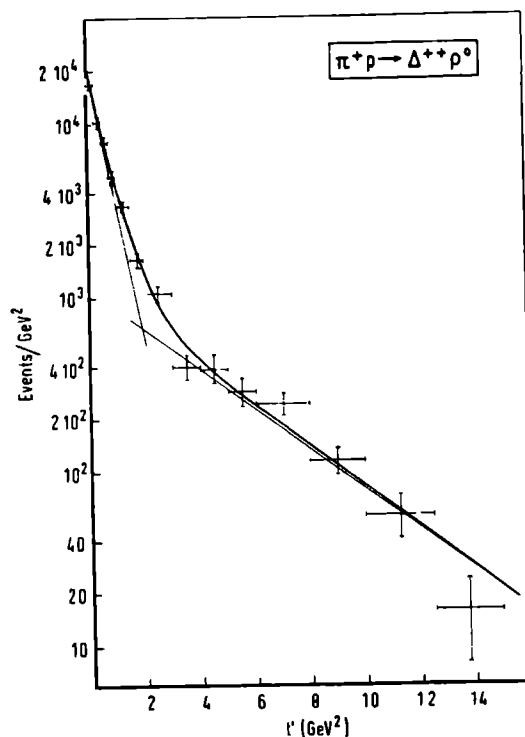


Fig. IV.4. De $\frac{dN}{dt'}$ -verdeling van de reactie $\Delta^{++} \rho^0$.

De $\ln(\frac{dN}{dt'})$ is, op een normalisatie constante na, bepaald door de richtingscoëfficiënten λ_1 en λ_2 van de twee asymptoten en hun snijpunt. Deze drie parameters zijn bepaald door een kleinste kwadraten aanpassing van de form. (IV.3) aan de experimentele punten. De resultaten van deze aanpassing zijn gegeven in tabel IV.4.

Tabel IV.4. Waarden van de hellingen en χ^2/ND voor de reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}f^0$.

Reactie	t' interval (GeV) ²	λ_1 (GeV) ⁻²	λ_2 (GeV) ⁻²	snijpunt	χ^2/ND
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}\rho^0$	0,0- 1,4	$16,7 \pm 0,9$	$2,7 \pm 0,2$	0,20	11,0/13
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}f^0$	0,0- 1,4	$11,9 \pm 1,9$	$1,6 \pm 0,3$	0,20	6,1/12

IV.b.2. Vervalshoekverdeling van Δ^{++} en ρ^0 .

Voor het interval $0,0 \leq t' \leq 0,2$ (GeV)², dat het merendeel van de verschijnselen in het $\Delta^{++}\rho^0$ massagebied bevat (972 van de in totaal 1249 verschijnselen) zijn de verdelingen van $\cos \vartheta$ en φ van de Δ^{++} en ρ^0 gegeven in fig. IV.5. De vervalshoeken zijn de poolcoördinaten van de proton- en π^+ -vlieg-

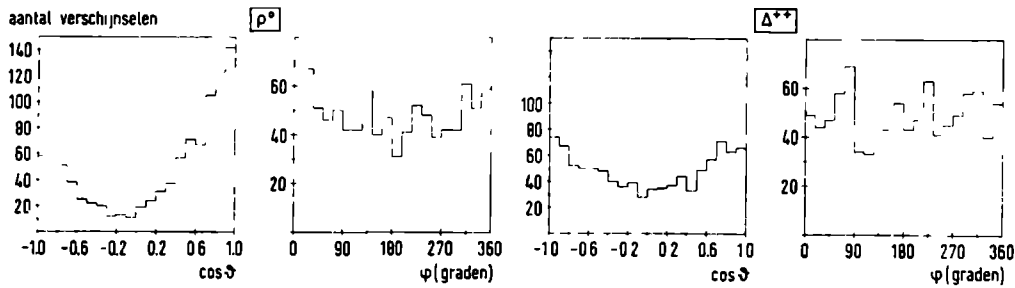


Fig. IV.5. De $\cos \vartheta$ - en φ -verdelingen van de ρ^0 resp. Δ^{++} vervalrichtingsvector in de reactie $\Delta^{++}\rho^0$.

richting t.o.v. het Δ^{++} resp. ρ^0 Jackson systeem. Tevens zijn over dit interval de gecombineerde $\Delta^{++}\rho^0$ spindichtheidsmatrix elementen berekend alsmede de "echte correlatie termen", die men uit de betreffende dichtheidsmatrix elementen kan afleiden (par. III.b.2). In tabel IV.5 staan de numerieke waarden van deze grootheden vermeld. De t' -afhankelijkheid van de spin dichtheidsmatrix elementen der afzonderlijke resonanties en de "echte correlatie termen" wordt getoond in fig. V.2 van Hfdst. V.

Tabel IV.5. De gemiddelde waarde van de spin dichtheidsmatrix elementen t.o.v. het Jackson systeem voor de reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$.

	$\lambda-\mu$	$\Delta^{++}\rho^0$ $0 \leq t' \leq .2$		$\Delta^{++}\omega^0$ $0 \leq t' \leq .55$	
		Dichtheids- matrix el.	Correlatie- term	Dichtheids- matrix el.	Correlatie term
ρ^{00}	0	.770±.024		.378±.037	
Re ρ^{10}	1	-.083±.016		-.100±.020	
ρ^{1-1}	2	-.034±.016		.092±.029	
ρ_{11}	0	.392±.019		.285±.027	
Re ρ_{31}	1	-.048±.019		-.051±.027	
Re ρ_{3-1}	2	-.020±.017		.013±.026	
$\rho_{33}-\rho_{11}$	0	.612±.100	.239±.083	.206±.131	.196±.130
Re ρ_{11}	1	.071±.039	.024±.038	.025±.048	.011±.047
ρ_{1-1}	2	.018±.036	-.001±.036	-.004±.065	.009±.064
Re ρ_{31}	1	.113±.049	.051±.042	.032±.064	.025±.064
Re ρ_{3-1}	2	.053±.042	.027±.037	.040±.060	.042±.060
Re($\rho_{31}^{10}-\rho_{31}^{0-1}$)	0	-.112±.027	-.120±.027	-.060±.037	-.070±.036
Re($\rho_{31}^{01}-\rho_{31}^{-10}$)	2	.002±.027	-.006±.027	.049±.033	.039±.033
Re ρ_{31}^{1-1}	1	.005±.014	.001±.014	.026±.025	.021±.025
Re ρ_{31}^{-11}	2	-.012±.014	-.014±.014	-.009±.024	-.004±.024
Re($\rho_{3-1}^{10}-\rho_{3-1}^{0-1}$)	1	-.038±.023	-.041±.023	.101±.032	.104±.032
Re($\rho_{3-1}^{01}-\rho_{3-1}^{-10}$)	2	-.017±.024	-.020±.024	-.026±.033	-.023±.033
Re ρ_{3-1}^{1-1}	0	.030±.012	.029±.012	.137±.022	.136±.022
Re ρ_{3-1}^{-11}	2	-.011±.012	-.012±.012	-.008±.024	-.009±.024

Tabel IV.6. De gemiddelde waarde van de statistische tensoren t.o.v.
de transversale systemen T-J., T-H. en T-DH. voor de
reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$.

	$\Delta^{++}\rho^0 \quad 0 \leq t' \leq .2$			$\Delta^{++}\omega^0 \quad 0 \leq t' \leq .55$		
	Transversaal			Transversaal		
	Jackson	Heliciteit	Doh.-Hög.	Jackson	Heliciteit	Doh.-Hög.
T_{00}^{02}	.102±.019	.102±.019	.102±.019	.008±.031	.008±.031	.008±.031
T_{00}^{20}	.155±.012	.155±.012	.155±.012	-.043±.022	-.043±.022	-.043±.022
T_{00}^{22}	.107±.027	.107±.027	.107±.027	.171±.050	.171±.050	.171±.050
Re T_{22}^{22}	.140±.027	-.043±.027	.189±.027	.053±.034	-.034±.035	.010±.036
Im T_{22}^{22}	.087±.027	-.141±.027	-.019±.027	-.003±.035	.006±.035	-.001±.034
Re T_{2-2}^{22}	.030±.027	.028±.027	.030±.027	.042±.034	.042±.034	.042±.034
Im T_{2-2}^{22}	.002±.027	.008±.027	.002±.027	-.013±.035	-.008±.035	-.013±.035
Re T_{20}^{22}	-.089±.023	-.026±.025	-.007±.024	.012±.032	-.049±.031	-.022±.031
Im T_{20}^{22}	.008±.024	.059±.023	.028±.024	-.055±.032	.003±.033	-.042±.033
Re T_{02}^{22}	-.068±.021	-.043±.021	-.075±.021	.037±.034	-.048±.033	-.008±.035
Im T_{02}^{22}	-.026±.022	.052±.021	-.004±.021	-.024±.035	-.016±.036	-.050±.034
Re T_{11}^{22}	.086±.023	.042±.021	.092±.023	.157±.035	-.151±.034	.004±.036
Im T_{11}^{22}	-.001±.020	-.091±.022	-.033±.020	-.088±.034	-.064±.035	-.154±.034
Re T_{1-1}^{22}	-.029±.021	-.030±.021	-.029±.021	.048±.036	.055±.036	.048±.036
Im T_{1-1}^{22}	.022±.022	.020±.022	.022±.022	-.038±.034	-.029±.034	-.038±.034
Re T_{02}^{02}	-.093±.015	-.059±.015	-.111±.015	-.030±.021	.008±.021	-.061±.022
Im T_{02}^{02}	-.039±.015	.084±.015	-.000±.015	-.042±.022	.039±.022	-.006±.022
Re T_{20}^{20}	-.155±.010	-.126±.011	-.165±.010	-.040±.015	-.031±.015	-.082±.014
Im T_{20}^{20}	-.059±.012	.103±.010	-.010±.011	-.070±.014	.057±.015	-.010±.015

In verband met het quark model (Hfdst. VI) is voor hetzelfde t' interval de gecombineerde hoekverdeling, nu ten opzichte van de transversale assenstelsels bepaald. De parametrisatie van deze hoekverdelingen in statistische tensoren is gegeven in tabel IV.6.

De Donohue-Högaasen parameters α, β, γ en θ_{DH} (par. III.d) van de Δ^{++} en ρ^0 zijn voor verschillende t' intervallen berekend (fig. IV.6a t/m h) door een meest aannemelijke aanpassing aan de hoekverdeling in het Jackson systeem van de

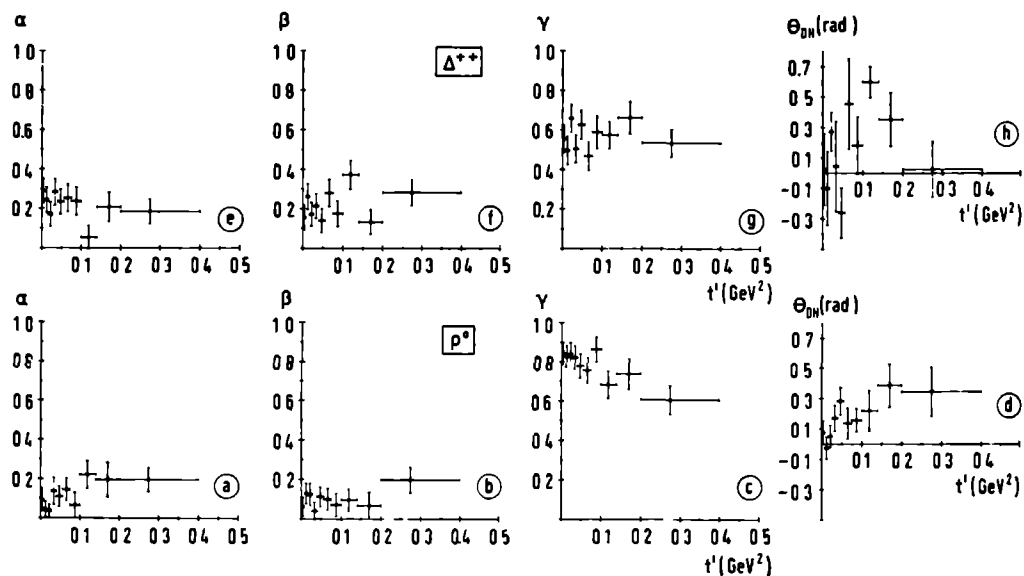


Fig. IV.6. De D.H.-parameters α, β, γ en de hoek θ_{DH} van de Δ^{++} en ρ^0 in de reactie $\Delta^{++} \rho^0$.

betreffende resonantie. De hoek θ_{DH} kan men met een veelvoud rond van $\frac{\pi}{2}$ radialen vermeerderen of verminderen, hetgeen een verwisseling van x- en z-as betekent ofwel van α en γ (par. III.d.1). Voor $t'=0$, d.w.z. de productie hoek $\theta_p=0$, moet de z-as van het D.-H. assenstelsel samenvallen met de z-as in het Jackson systeem, omdat het productie vlak en dus ook een rotatie om de normaal op het productie vlak voor $\theta_p=0$ niet gedefinieerd is. Daarom is voor kleine waarden van t' de eis gesteld dat θ_{DH} moet liggen tussen $-\frac{\pi}{4}$ en $+\frac{\pi}{4}$. Wanneer deze voorwaarde ten ge-

volge van de grote fouten op de hoek θ_{DH} geen eenduidigheid bracht is die waarde van θ_{DH} gekozen, waarbij het verloop van de parameters α en γ als functie van t' zo gelijkmatig mogelijk was.

IV.b.3. Positiviteitseisen.

In een tweetal publicaties^{(8),(9)} heeft Minnaert er op gewezen dat de dichtheidsmatrix elementen van de afzonderlijke resonanties aan bepaalde ongelijkheden moeten voldoen. Deze relaties volgen uit de voorwaarde dat de eigenwaarden van de dichtheidsmatrix positief moeten zijn.

Omdat voor de meson resonanties de D.-H. parameters α , β en γ de eigenwaarden van het reële deel van dichtheidsmatrix zijn volgt uit fig. IV.6 onmiddellijk dat de dichtheidsmatrix elementen (voorzover ze experimenteel te bepalen zijn) aan de positiviteitseisen voldoen.

Voor de baryon resonantie zijn de vier eigenwaarden van de dichtheidsmatrix

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{1}{4} + \sqrt{(\rho_{33} - \frac{1}{4})^2 + |\rho_{31}|^2 + |\rho_{3-1}|^2} \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = \frac{1}{4} - \sqrt{(\rho_{33} - \frac{1}{4})^2 + |\rho_{31}|^2 + |\rho_{3-1}|^2}\end{aligned}\quad (IV.4)$$

De positiviteitseis betekent dus dat voor het reële gedeelte van de dichtheidsmatrix moet gelden:

$$\sqrt{(\rho_{33} - \frac{1}{4})^2 + (\text{Re } \rho_{31})^2 + (\text{Re } \rho_{3-1})^2} \leq 0,25$$

Uit fig. IV.7 blijkt dat binnen de fouten aan deze voorwaarde is voldaan.

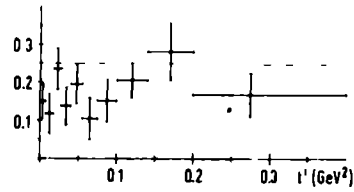


Fig. IV.7. De absolute waarde van $(\lambda - 0.25)$, λ is een van de eigenwaarden van de Δ^{++} spin-dichtheidsmatrix.

IV.b.4. Parametrisatie van de S-golf interferentie.

Uitgaande van de veronderstelling dat asymmetrie van het ρ^0 verval veroorzaakt wordt door interferentie met een S-golf, kan men de hoekverdeling van het $\Delta^{++}\rho^0$ verval geheel parametriseren door aan de form. (III.9), die het zuivere $\Delta^{++}\rho^0$ verval beschrijft 10 termen toe te voegen:

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{3} \cos \vartheta_\alpha \operatorname{Re}(\rho^{0\epsilon}) \\
 & + 2\sqrt{3} \cos \vartheta_\alpha (1 - 3 \cos^2 \vartheta_\beta) \operatorname{Re}(\rho_{33}^{0\epsilon} - \rho_{11}^{0\epsilon}) \\
 & - 2\sqrt{6} \sin \vartheta_\alpha \cos \varphi_\alpha \operatorname{Re}(\rho^{1\epsilon}) \\
 & - \sqrt{6} \sin \vartheta_\alpha \cos \varphi_\alpha (1 - 3 \cos^2 \vartheta_\beta) \operatorname{Re}(\rho_{1-}^{1\epsilon}) \\
 & - 6 \cos \vartheta_\alpha [\sin 2 \vartheta_\beta \cos \varphi_\beta \operatorname{Re}(\rho_{31}^{0\epsilon} + \rho_{13}^{0\epsilon}) + \sin^2 \vartheta_\beta \cos 2\varphi_\beta \operatorname{Re}(\rho_{3-1}^{0\epsilon} + \rho_{-13}^{0\epsilon})] \\
 & + 3\sqrt{2} \sin \vartheta_\alpha \sin 2\vartheta_\beta [\cos(\varphi_\alpha + \varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho_{31}^{1\epsilon} - \rho_{-1-3}^{1\epsilon}) + \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho_{13}^{1\epsilon} - \rho_{-3-1}^{1\epsilon})] \\
 & + 3\sqrt{2} \sin \vartheta_\alpha \sin^2 \vartheta_\beta [\cos(\varphi_\alpha + 2\varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho_{3-1}^{1\epsilon} + \rho_{1-3}^{1\epsilon}) + \cos(\varphi_\alpha - 2\varphi_\beta) \operatorname{Re}(\rho_{13}^{1\epsilon} + \rho_{-31}^{1\epsilon})]
 \end{aligned}$$

(IV.5)

waarbij ϵ de spintoestand van de S-golf weergeeft.

In tabel IV.7 zijn de numerieke waarden van deze dichtheidsmatrix elementen gegeven voor het t' interval $0 \leq t' \leq 0.2 \text{ (GeV)}^2$.

Tabel IV.7. Gemiddelde waarden van de S-P interferentie termen.

	$ \lambda-\mu $	
$\text{Re } \rho^{0\varepsilon}$	0	$0,230 \pm 0,018$
$\text{Re } \rho^{1\varepsilon}$	1	$-0,034 \pm 0,010$
$\text{Re}(\rho_{33}^{0\varepsilon} - \rho_{11}^{0\varepsilon})$	0	$-0,116 \pm 0,024$
$\text{Re}(\rho_{11}^{1\varepsilon})$	1	$0,002 \pm 0,023$
$\text{Re}(\rho_{31}^{0\varepsilon} + \rho_{13}^{0\varepsilon})$	1	$-0,029 \pm 0,024$
$\text{Re}(\rho_{3-1}^{0\varepsilon} + \rho_{-13}^{0\varepsilon})$	2	$-0,019 \pm 0,020$
$\text{Re}(\rho_{31}^{1\varepsilon} - \rho_{1-3}^{1\varepsilon})$	0	$-0,057 \pm 0,016$
$\text{Re}(\rho_{13}^{1\varepsilon} - \rho_{-3-1}^{1\varepsilon})$	2	$0,023 \pm 0,016$
$\text{Re}(\rho_{3-1}^{1\varepsilon} + \rho_{1-3}^{1\varepsilon})$	1	$0,006 \pm 0,014$
$\text{Re}(\rho_{-13}^{1\varepsilon} + \rho_{-31}^{1\varepsilon})$	2	$-0,009 \pm 0,015$

IV.b.5. Onderlinge fases van de belangrijkste amplituden.

In de tweede kolom van de tabellen IV.5 en IV.7 is de kleinste waarde van $|\lambda-\mu|$ vermeld van de amplituden die tot het betreffende dichtheidsmatrix element bijdragen. Hierbij zijn λ en μ de verschillen in heliciteit tussen inkomend en uitgaand meson resp. baryon. De heliciteitsamplituden zijn evenredig⁽¹⁰⁾ met $(\sin \frac{\theta_p}{2})^{|\lambda-\mu|}$, waarbij θ_p de productie hoek is (zie App. A2). In de voorwaartse richting ($\theta_p=0$) kunnen dus alleen de amplituden met $|\lambda-\mu|=0$ van nul verschillen. Zijn de spin dichtheidsmatrix elementen niet sterk van t' afhankelijk dan zal ook in het interval $0 \leq t' \leq 0,2 \text{ GeV}^2$ deze bewering bij benadering geldig blijven.

In dit voorwaartse interval zullen dan slechts de volgende amplituden een rol spelen:

$$\begin{aligned} \text{voor } \Delta^{++}\rho^0 \quad & p = \langle 1,3|1 \rangle = \langle -1,-3|-1 \rangle \\ & q = \langle 0,1|1 \rangle = \langle 0,-1|-1 \rangle \\ & r = \langle -1,-1|1 \rangle = \langle 1,1|-1 \rangle \\ \text{en voor } \Delta^{++}S^0 \quad & s = \langle \epsilon, 1|1 \rangle = \langle \epsilon,-1|-1 \rangle \quad (\epsilon=0) \end{aligned}$$

In de uitdrukking $\langle m,2n|2\lambda \rangle$ stellen m , n en λ de spin toestanden van uitgaand meson, uitgaand baryon en inkomend baryon voor. De gelijkheid van de amplituden $\langle 1,3|1 \rangle$ en $\langle -1,-3|-1 \rangle$ etc. volgt uit pariteitsbehoud.

Verwaarloost men eerst de bijdrage van de S-golf zodat

$$|p|^2 + |q|^2 + |r|^2 \approx \frac{1}{2}$$

dan volgt uit de diagonaal matrix elementen:

$$|q|^2 \approx \frac{\rho_{00}^{00}}{2} = 0,38 \pm 0,01$$

$$|p|^2 \approx \rho_{33} = \frac{1}{2} - \rho_{11} = 0,11 \pm 0,02$$

en

$$|r|^2 \approx 0,0.$$

Uit de dichtheidsmatrix elementen

$$\text{Re}(\rho_{31}^{10} - \rho_{3-1}^{0-1}) = \text{Re}(pq^*) = -0,11 \pm 0,03$$

$$\text{en } \text{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}) = \text{Re}(pr^*) = 0,03 \pm 0,01$$

kan men dan in principe de onderlinge fases van p , q en r bepalen.

De fase tussen p en q is ongeveer 120° en de fase van r is moeilijk te bepalen omdat $|r|^2$ erg klein is.

Uit de interferentie termen

$$\text{Re } \rho^{0\epsilon} = 2 \text{Re}(qs^*) = 0,23 \pm 0,02$$

$$\text{of } \text{Re}(\rho_{33}^{0\epsilon} - \rho_{11}^{0\epsilon}) = -\text{Re}(qs^*) = -0,12 \pm 0,02$$

$$\text{en } \operatorname{Re}(\rho_{31}^{1\varepsilon} \rho_{-1-3}^{1\varepsilon}) = \operatorname{Re}(\rho_{31}^{1\varepsilon}) = 0,06 \pm 0,02$$

volgt dan dat de fase van s t.o.v. q ongeveer -30° is en dat $|s|^2 \approx 0,045$ is. De uit deze bepaling volgende schatting voor de totale S-golf bijdrage ($2|s|^2 \approx 0,09$) is in goede overeenstemming met de raming van par. IV.a.2, waar een $\Delta^{++}\pi^+\pi^-$ achtergrond van 8% was gevonden.

IV.c. De reactie $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}f^0$.

1) Uit fig. IV.8 blijkt dat de $\frac{dN}{dt'}$ verdeling evenals bij

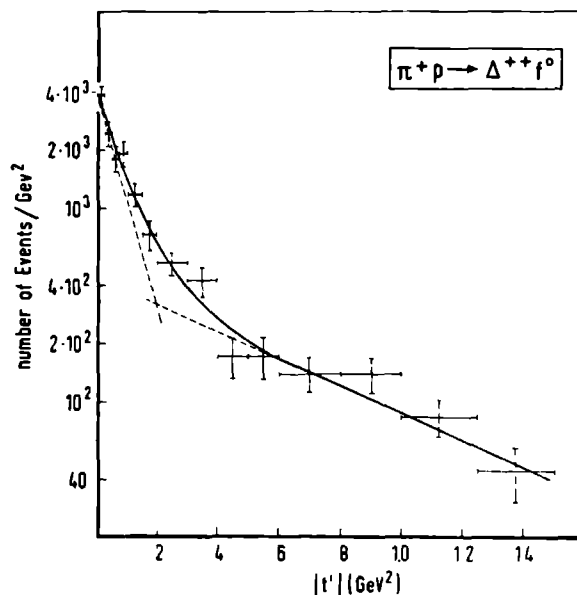


Fig. IV.8. De $\frac{dN}{dt'}$ -verdeling voor de reactie $\Delta^{++}f^0$.

$\Delta^{++}\rho^0$ door een som van twee exponentiële functies benaderd kan worden. De parameters van deze exponentiëlen staan vermeld in Tabel IV.4.

2) In de fig. IV.9 zijn van de 270 verschijnselen die in het t' -interval $0,0 \leq t' \leq 0,2 \text{ (GeV)}^2$ liggen de Jackson hoekverdelingen gegeven. De spin-dichtheidsmatrix van de f^0

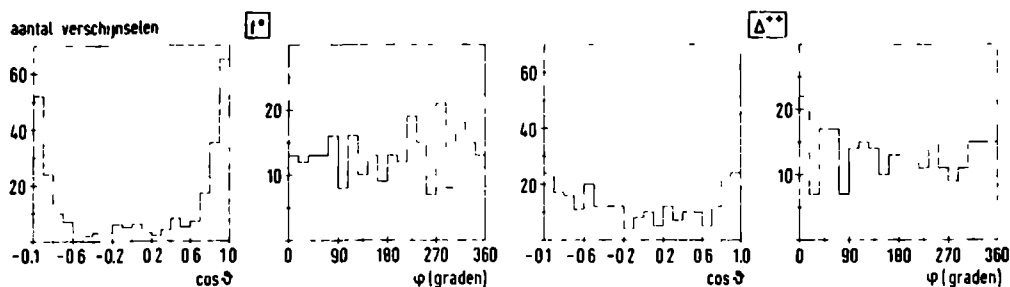


Fig. IV.9. De $\cos \vartheta$ - en φ -verdelingen van de f^0 resp. Δ^{++} vervalsrichtingsvector in de reactie $\Delta^{++} f^0$.

is niet bepaald omwille van de in par. IV.a.3 besproken interferentie effecten. De gemiddelde waarden van de Δ^{++} spin-dichtheidsmatrix elementen over dit interval zijn:

$$\rho_{11} = 0,45 \pm 0,04; \quad \text{Re}(\rho_{31}) = 0,02 \pm 0,04; \quad \text{Re}(\rho_{3-1}) = 0,01 \pm 0,04.$$

IV.d. Het 1C-kanaal $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$.

In dit kanaal komen de reacties $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$ en $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$ voor. Het aantal verschijnselen in het $\Delta^{++} \eta^0$ en $\Delta^{++} \omega^0$ massagebied (voor de definitie van de massagebieden zie Tabel IV.1) bedraagt 41 resp. 546. Van slechts twee verschijnselen lagen beide combinaties, ontstaan door π^+ verwisseling, in het $\Delta^{++} \omega^0$ massagebied. Deze ambiguïteit is opgelost door de combinatie met de kleinste $t'_{p \rightarrow p\pi^+}$ te kiezen. De achtergrond in het $\Delta^{++} \omega^0$ massagebied is ongeveer 19%, waarvan 7% $\Delta^{++} \pi^+ \pi^- \pi^0$ en eveneens 7% $p \pi^+ \omega^0$. Bij de bepaling van de differentiële werkzame doorsnede en de vervalshoekverdelingen is om dezelfde redenen als in het 4C-kanaal (par. IV.a.2) een correctie voor de achtergrond achterwege gelaten.

IV.e. De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$.

- a) Met uitzondering van de extreem voorwaartse richting ($t' < 0,1 \text{ GeV}^2$) kan men de $\frac{dN}{dt'}$ verdeling (fig. IV.10) beschrijven met een enkele e-macht:

$$\frac{dN}{dt'} = B_1 e^{-\lambda_1 t'} \quad (\text{IV.6})$$

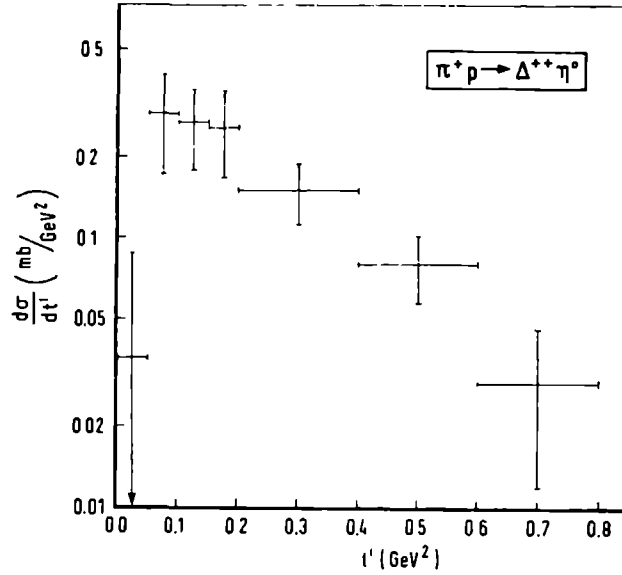


Fig. IV.10. De $\frac{d\sigma}{dt'}$ -verdeling voor de reactie $\Delta^{++} \eta^0$.

De parameter λ_1 , die met de kleinste kwadraten methode is bepaald, staat vermeld in Tabel IV.8.

Tabel IV.8. Waarden van de hellingen en χ^2/ND voor de reacties $\Delta^{++} \eta^0$ en $\Delta^{++} \omega^0$.

Reactie	t' -Interval (GeV) ²	λ_1 (GeV) ⁻²	χ^2/ND
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$	0,10 - 0,80	$3.7 \pm 0,8$	0,3/3
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$	0,15 - 1,00	$4.3 \pm 0,3$	15,7/15

De inzinking in de voorwaartse richting wijst er op dat de spin flip amplituden ($|\mu| > 0$), die in de voorwaartse richting moeten verdwijnen, een belangrijke bijdrage tot deze reactie leveren.

b) Van de verschijnselen die in het t' -interval $0 \leq t' \leq 0,8 \text{ GeV}^2$ liggen (36 verschijnselen) zijn in fig.IV.11

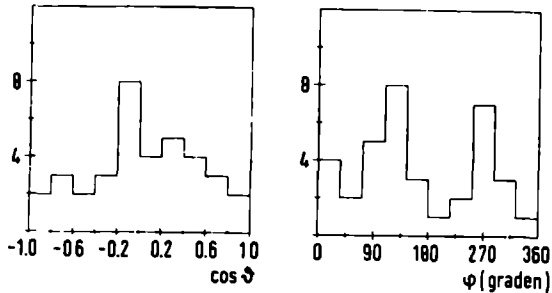


Fig. IV.11. De $\cos \vartheta$ - en φ -verdelingen

van de Δ^{++} in de reactie $\Delta^{++} \eta^0$.

de verdelingen van de Δ^{++} Jackson hoeken gegeven. De dichtheidsmatrix elementen, berekend over dit t' -interval zijn gegeven in tabel IV.9, kolom 2. In kolom 3 staan de waarden van de dichtheids-

matrix elementen vermeld, die men verkrijgt door ook de $\Delta^{++} \eta^0$ verschijnselen te analyseren, waarbij de η^0 naar alléén neutrale deeltjes vervalst. Deze verschijnselen worden waargenomen in het 2 poot NOFIT kanaal⁽¹¹⁾.

Tabel IV.9. Spin-dichtheidsmatrix elementen van de Δ^{++} in de reactie $\Delta^{++} \eta^0$.

	4-poot	2-poot + 4-poot
ρ_{33}	$0,44 \pm 0,08$	$0,38 \pm 0,06$
$\text{Re } \rho_{31}$	$0,12 \pm 0,07$	$0,08 \pm 0,05$
$\text{Re } \rho_{3-1}$	$0,22 \pm 0,09$	$0,28 \pm 0,06$

IV.f.1. De reactie $\pi^+ \rho \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$.

a) De $\ln(\frac{dN}{dt'})$ verdeling (fig. IV.12) kan, ook weer afgezien van de structuur in de extreem voorwaartse richting door één

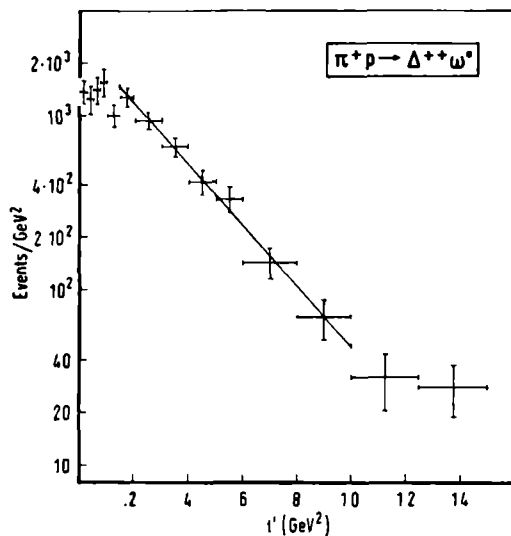


Fig. IV.12. De $\frac{dN}{dt'}$ -verdeling van de reactie $\Delta^{++} \omega^0$.

rechte lijn beschreven worden. De helling van de lijn (λ_1), die bepaald is door een kleinste kwadraten aanpassing van de formule (IV.6) aan de experimentele punten is gegeven in tabel IV.8.

b) Van de 443 verschijnselen uit het $\Delta^{++} \omega^0$ massagebied, die een $t' \leq 0,55 \text{ GeV}^2$ hebben, worden de Jackson hoekverdeling- en getoond in fig. IV.13.

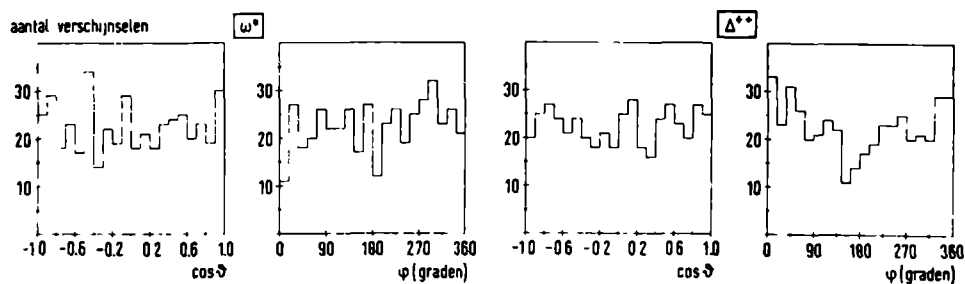


Fig. IV.13. De $\cos \vartheta$ - en φ -verdelingen van de ω^0 resp. Δ^{++} valsrichtingsvector in de reactie $\Delta^{++} \omega^0$.

De gemiddelde waarden van de spin-dichtheidsmatrix elementen en de "echte correlatie termen" zijn opgenomen in tabel IV.5. De t' -afhankelijkheid van dichtheidsmatrix elementen van de afzonderlijke resonanties en de echte correlatie termen wordt getoond in de fig. V.4 van Hfdst. V.

De gemiddelde waarden van de statistische tensoren, bepaald t.o.v. de transversale assenstelsels zijn gegeven in tabel IV.6.

c) De Donohue-Högaasen parameters van de Δ^{++} en ω^0 zijn voor verschillende t' -intervallen uitgezet in fig. IV.14a t/m h.

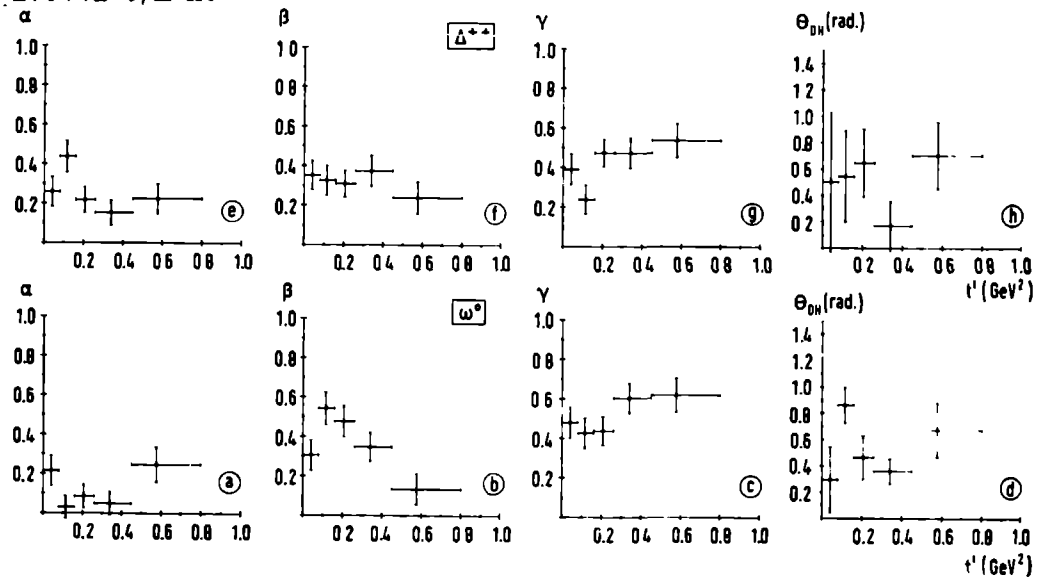


Fig. IV.14. De D.H.-parameters α, β, γ en de hoek θ_{DH} van de Δ^{++} en ω^0 in de reactie $\Delta^{++} \omega^0$.

IV.f.2. Positiviteitseisen.

Voor de ω^0 resonantie kan men ook weer direct uit de waarden van de D.-H. parameters α, β en γ zien dat aan de positiviteitseisen is voldaan (fig. IV.14).

Dat ook de spin dichtheidsmatrix elementen van de Δ^{++} aan de positiviteitseisen voldoen volgt uit fig. IV.15, waarin

$$\sqrt{(\rho_{33}^{-1})^2 + (\text{Re } \rho_{31})^2 + \text{Re}(\rho_{3-1})^2}$$

is uitgezet.

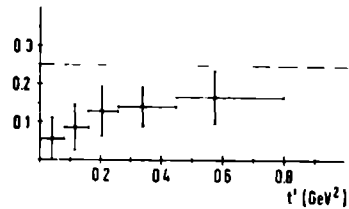


Fig. IV.15. De absolute waarde van $(\lambda - 0.25)$, λ is een van de eigenwaarden van de Δ^{++} spin-dichtheidsmatrix.

IV.f.3. Fasen van de amplitudes.

Voorzover de benadering van de voorwaartse richting nog opgaat voor het betreffende t' -interval ($0 \leq t' \leq 0.55 \text{ (GeV)}^2$) vindt men voor p , q en r (cf par. IV.b.5)

$$|p|^2 = 0.22 \pm 0.03$$

$$|q|^2 = 0.19 \pm 0.02$$

$$|r|^2 = 0.09 \pm 0.03$$

Vergelijkt men de waarde van $\text{Re}(\rho_{31}^{10} - \rho_{31}^{0-1}) = -0.060$ met het product $|p| \cdot |q| = 0.20$ dan blijkt dat p en q niet in fase zijn. Uit de overeenkomst van $\text{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}) = 0.14 \pm 0.03$ met het product $|p| \cdot |r| = 0.14 \pm 0.03$ kan men besluiten dat anderzijds de amplituden p en r wel in fase zijn. Het faseverschil tussen p en r is $(0 \pm 20)^\circ$.

Referenties.

- 1) N. Schmitz, Proceedings of the 1965 Eastern School,
CERN 65-24 vol. 1 (1965).
- 2) D.J. Schotanus, Dissertatie, Nijmegen 1971.
- 3) Bonn-Durham-Nijmegen-Paris (E.P.)-Torino collaboratie,
C.L. Pols et al., Nuclear Physics B25 (1971), 109.
- 4) J.D. Jackson, Nuovo Cimento 34 (1964), 1644.
- 5) H.P. Dürr and H. Pilkuhn, Nuovo Cimento 40A (1965), 899.
- 6) Aachen-Berlin-CERN collaboratie,
J. Bartsch et al., Nuclear Physics B22 (1970), 1.
- 7) Aachen-Berlin-CERN collaboratie,
J.V. Beaupre et al., Nuclear Physics B28 (1971), 77.
- 8) P. Minnaert, Phys. Rev. Letters 16 (1966), 672.
- 9) P. Minnaert, Phys. Rev. 151 (1966), 1306.
- 10) K. Gottfried and J.D. Jackson, Nuovo Cimento 34 (1964), 735.
- 11) Durham-Nijmegen-Paris (E.P.)-Torino collaboratie,
D.J. Schotanus et al., Nuclear Physics B22 (1970), 45.
- 12) L. Stodolsky and J.J. Sakurai, Phys. Rev. Letters 11 (1963), 651.
- 13) J.T. Donohue, Nuovo Cimento 52A (1967), 1152.
- 14) Chan Hong-Mo, R.O. Raito, G.H. Thomas and N.A. Toruqvist,
Nuclear Physics B19 (1970), 173.

V. Uitwisselingsmodellen voor quasi twee deeltjes reacties.

In het vorige hoofdstuk is gebleken dat de quasi twee deeltjes reacties voornamelijk bij kleine waarden van de impuls overdracht verlopen. De verklaring die men hiervoor geeft is dat deze reacties perifeer verlopen en door krachten met grote dracht tot stand komen. Deze krachten kunnen veroorzaakt worden gedacht door de uitwisseling van betrekkelijk lichte deeltjes. Quantitatieve uitwerkingen van dit idee zijn het één-meson uitwisselingsmodel (met of zonder absorptie) en het Regge-pool model. In dit hoofdstuk wordt nagegaan in hoeverre deze modellen de experimentele gegevens omtrent deze reacties op juiste wijze beschrijven en welke de aard is van de uitgewisselde mesonen of Regge banen. Voor een uitgebreide behandeling van deze modellen wordt verwezen naar de litteratuur over het één-meson uitwisselingsmodel ⁽¹⁾, ⁽²⁾, ⁽³⁾ en het Regge-pool model ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾, ⁽⁶⁾.

V.a.1. Eén-meson uitwisselingsmodel met absorptie (OMEA-model).

In het één-meson uitwisselings (OME)-model wordt de amplitude van het proces beschreven door de Born-term benadering ⁽³⁾. Overeenkomstig de Feynman regels bestaat de Born-term uit twee vertex functies en een zg. propagator. Deze propagator term ($1/(m_e^2 - t)$) heeft een pool voor de waarde van de impuls overdracht $t = m_e^2$, waarbij m_e de massa van het uitgewisselde meson is. De nabijheid van deze pool verklaart, althans kwalitatief, waarom de differentiële werkzame doorsnede van de reactie (waarbij altijd $t \leq 0$ is) een piek vertoont voor kleine waarden van $|t|$.

De voorspellingen van dit OME-model zijn wat betreft de totale en differentiële werkzame doorsnede niet in overeenstemming met de experimentele gegevens. De berekende waarde van de werkzame doorsnede is te hoog en de differentiële werkzame doorsnede neemt niet snel goed af als functie van de impuls overdracht. Een weg om het OME-model meer met de data in overeenstemming te brengen zonder de invoering van nogal drastische vormfactoren ⁽⁷⁾ is voor het eerst door Sopkovich ⁽⁸⁾ geweest. Gottfried en Jackson ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾ en Dar, Watts en Weisskopf ⁽¹¹⁾ hebben deze methode verder uitgewerkt.

De idee is dat het proces welk men wenst te beschrijven concurrentie ondervindt van alle mogelijke andere reacties. Komen deze reacties veelal voor bij lage impulsmoment (1) toestanden, dan zullen de lage-1 bijdragen (d.w.z. hoge t-waarden) tot het te beschrijven proces hiervan de meeste invloed ondervinden. Het gevolg van deze zg. absorptie is dat de differentiële werkzame doorsnede sterker met t-afneemt en dat ook de totale werkzame doorsnede kleiner is dan bij het OME-model.

Ten einde de absorptie in rekening te brengen ontbindt men de Born-term op de gebruikelijke wijze in een som van partiële golven, welke ieder afzonderlijk vermenigvuldigd worden met een dempingsfactor $\eta(1)$. Hierbij is $\eta(1)$ een functie van het impulsmoment 1 van de betreffende partiële golf. Sommatie over 1 geeft de door absorptie gemodificeerde Born-term. De methode van Gottfried-Jackson en Dar-Watts-Weisskopf verschillen alleen in de bepaling van $\eta(1)$.

V.a.2. Gottfried-Jackson absorptie model.

Door Gottfried en Jackson wordt de absorptie in verband gebracht met de mogelijkheid dat deeltjes in de begin- en eindtoestand elastisch verstrooid worden resp. voor en na de eigenlijke wisselwerking⁽⁹⁾. Zij veronderstellen daarbij dat deze elastische verstrooiing zuivere diffractie verstrooiing is, waarbij de amplitude zuivere imaginair en spin onafhankelijk is. Voor $\eta(1)$ geldt dan dat:

$$\eta(1) = \exp(i\delta_i(1)) \cdot \exp(i\delta_f(1)) \quad (V.1)$$

waarbij de faseverschuivingen $\delta_i(1)$ en $\delta_f(1)$ voor de elastische verstrooiing in de begin- en eindtoestand zuiver imaginair zijn.

Omdat de fase verschuivingen zuiver imaginair zijn kan men de δ_i voor de begintoestand bepalen uit de differentiële- en totale werkzame voor elastische π^+p verstrooiing. Een gebruikelijke parametrisatie voor de differentiële werkzame doorsnede van sterk perifere processen is de volgende:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \left(\frac{d\sigma_{el}}{dt} \right)_{t=0} e^{At} \quad (V.2)$$

Voor betrekkelijk kleine waarden van $t(0-0,5 \text{ GeV}^2)$ is dit een goede benadering. Uit de stootparameter representatie voor de elastische verstrooiing⁽¹²⁾ volgt dan dat:

$$\exp(2i \delta_i(1)) = 1 - C_i \exp(-\gamma_i b^2) \quad (\text{V.3})$$

In deze formule is

$$C_i = \frac{4\sigma_{el}}{\sigma_T}, \quad \gamma_i = \frac{1}{2A} \quad \text{en} \quad b \approx \frac{1}{q}$$

waarbij σ_{el} en σ_T de elastische en totale werkzame doorsnede voor π^+p verstrooiing voorstellen, b de stootparameter en q de impuls in het massa middelpunt systeem (C.M.S.). De grootte A staat in verband met de π^+p interactie radius (R):

$$A = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Uit de bekende waarden van σ_{el} , σ_T en A voor π^+p verstrooiing bepaalt men de parameters C_i en γ_i .

Over de elastische verstrooiing tussen de deeltjes in de eindtoestand, welke instabiel zijn, is experimenteel niets bekend. Men veronderstelt evenwel dat deze op dezelfde wijze geparametriseerd kan worden. De parameters γ_f en C_f beschouwt men als vrije parameters, welke zodanig gekozen worden dat de overeenstemming met het experiment zo goed als mogelijk is. De constanten C_i en C_f beïnvloeden voornamelijk de breedte van de $\frac{d\sigma}{dt}$ verdeling van de te beschrijven reacties. De maximale waarde welke C kan aannemen is 1, opdat de e -macht in het linkerlid van formule (V.3) positief blijft. In de praktijk blijkt dat men $C_f \approx 1$ moet kiezen om voldoende collimatie in de voorwaartse richting te verkrijgen.

De constanten γ_i en γ_f hebben voornamelijk invloed op de hoogte van de differentiële werkzame doorsnede. Kleine waarden van γ , d.w.z. een grote straal van de diffractie schijf (R) verlagen de werkzame doorsnede. Het blijkt dat men γ_f kleiner dan γ_i moet kiezen om een voldoende lage werkzame doorsnede te krijgen ($\gamma_f \approx (\frac{1}{2} \text{ of } \frac{1}{4}) \gamma_i$).

Voor de reacties die op π -meson uitwisseling berusten geeft het G-J absorptie model goede resultaten. Dit is niet het geval voor reacties die via vector-meson uitwisseling verlopen. De Born-term van het OME-model⁽³⁾ is evenredig met S^J , waarbij J de spin is van het uitgewisselde meson. De werkzame doorsnede is dus evenredig met S^{2J-2} . Bij vector uitwisseling (J=1) volgt uit het OME-model dat de werkzame doorsnede constant is, terwijl experimenteel blijkt dat deze met toenemende s afneemt. Brengt men absorptie in rekening dan wordt de energie afhankelijkheid bij benadering⁽¹¹⁾

$$S^{2J-2} e^{-2m_e R}, \quad (V.4)$$

waarbij m_e de massa van het uitgewisselde meson is. Omdat evenwel de straal van de diffractie schijf (R) zeer weinig met de energie verandert is de energie afhankelijkheid van de werkzame doorsnede nog steeds niet in overeenstemming is met het experiment voor $J \geq 1$. Omwille hiervan hebben Dar-Watts en Weisskopf de absorptie op een andere wijze in rekening gebracht.

V.a.3. Dar-Watts-Weisskopf absorptie model.

In dit model wordt de absorptie factor $\eta(1)$ voorgesteld door een uitdrukking die in de kernfysica bekend is als de Woods-Saxon formule⁽¹³⁾

$$\eta(1) = \frac{1}{1 + \exp \frac{(R-b)}{d}} \quad (V.5)$$

waarbij $b \approx \frac{1}{\sqrt{q} q'}$, q en q' zijn de C.M.S. impulsen van de inkomende en uitgaande deeltjes. Het functionele verband tussen $\eta(1)$ en b verschilt niet veel van het G.-J. model. Het grote verschil is dat de parameters R en d nu niet gerelateerd worden aan de elastische verstrooiing, maar bepaald worden door vergelijking van de model-voorspellingen met een reactie die via uitwisseling van een meson met spin $J \geq 1$ verloopt, waarvoor het G.-J. model geen goede energie afhankelijkheid gaf. Een voorbeeld van zulk een reactie is $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ ⁽¹⁴⁾ waarbij men op grond van de quantum getallen (cf. Tabel V.3) mag veronderstellen dat de reactie via ρ -meson uitwisseling verloopt. Bovendien is van deze reactie

de werkzame doorsnede bij verschillende energieën beter bekend dan van andere reacties die op vector-meson uitwisseling berusten. Het blijkt dat men deze reactie goed met het absorptie model kan beschrijven door zowel R en d logarithmisch met de energie te laten toenemen:

$$R \approx 1,45 \ln \frac{s}{0,62} \text{ GeV}^{-1}$$

$$d \approx 0,25 \ln \frac{s}{1,28} \text{ GeV}^{-1}$$

De grootheid R is weer een maat voor de diffractie schijf en d bepaalt hoe scherp de overgang is aan de rand van de diffractie schijf.

De hypothese van Dar et al. is dat alle πp twee deeltjes reacties die via meson uitwisseling tot stand komen, met deze waarden van R en d door het absorptie model beschreven kunnen worden, ongeacht de spin van het uitgewisselde meson. Hierbij dienen evenwel twee zaken opgemerkt te worden. Enerzijds is het model alleen getest voor reacties die via π -meson of vector-meson (ρ, ω, K^*) uitwisseling verlopen en niet voor reacties waarbij de spin van het uitgewisselde meson $J > 1$ is. Anderzijds is de energie afhankelijkheid van de grootheden R en d gekoppeld aan een reactie die via vector-meson uitwisseling verloopt, waardoor de juiste energie afhankelijkheid van de model voorspellingen voor vector-meson uitwisseling gewaarborgd is. Daarnaast speelt de energie afhankelijkheid van R voor reacties met π -uitwisseling - waarvoor ook het G.-J. model goede resultaten geeft - een geringe rol omdat m_e in de benaderde dempingsfactor (cf. form. V.4) $e^{-2m_e R}$ dan klein is.

V.b. Quantum getallen van de uitgewisselde mesonen.

Het behoud van vreemdheid, isospin, G-pariteit, impulsmoment en pariteit aan zowel de meson-als de baryon-vertex beperkt het aantal bekende mesonen die uitgewisseld kunnen worden in de reacties welke in dit hoofdstuk ter sprake komen.

In alle reacties is de vreemdheid (S) van de deeltjes in begin- en eindtoestand nul. Daar S een additief quantum getal is moet ook voor het uitgewisselde meson gelden: $S_e = 0$.

De lading van de uitgaande deeltjes verschilt van die van de inkomende deeltjes in alle reacties. Het uitgewisselde meson (met $S_e = 0$) moet dus een isospin ongelijk nul hebben. Van alle bekende mesonen met $S = 0$ is de isospin $I = 0$ of 1 . Hieruit volgt $I_e = 1$.

De G-pariteit is een multiplicatief quantum getal met de waarde ± 1 . Alle "niet-vreemde" mesonen hebben een wel bepaalde G-pariteit. Omdat de G-pariteit van het inkomend π -meson -1 is, volgt uit het behoud van G-pariteit aan de meson vertex dat de G-pariteit van het uitgewisselde meson tegengesteld is aan de G-pariteit van het meson in de eindtoestand.

Het behoud van impuls moment én pariteit (J^P) geeft alleen een beperking als naast het inkomende meson ofwel het uitgaande ofwel het uitgewisselde meson spin-nul heeft.

In Tabel V.1 is aangegeven welke quantum getallen in de verschillende reacties uitgewisseld kunnen worden en welke bekende mesonen de dragers van deze quantum getallen zijn.

Tabel V.1.

Reactie	meson in eindtoestand		uitgewisselde meson		bekende deeltjes
	G	J^P	G	J^P	
$\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$	-1	0^-	+1	$0^+, 1^-, 2^+ \dots$	ρ
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$	+1	1^-	-1	} willekeurig, niet 0^+	π, A_2
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega$	-1	1^-	+1		ρ, B
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta$	+1	0^-	-1	$0^+, 1^-, 2^+ \dots$	A_2

V.c. Vergelijking van de absorptie model voorspellingen met het experiment.

a) De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ (π -uitwisseling).

Bij deze reactie kan het uitgewisselde meson een π -meson of A_2 -meson zijn. Omdat de massa van het A_2 -meson veel groter is dan de pion massa wordt als vertrekpunt meestal verondersteld dat de A_2 bijdrage verwaarloosd kan worden. Vergeleken worden de experimentele $\frac{d\sigma}{dt}$ verdeling

(fig. V.1), de dichtheidsmatrix elementen van de afzonderlijke resonanties (fig. V.2) en de zg. "echte" correlatietermen (fig. V.3) als functie

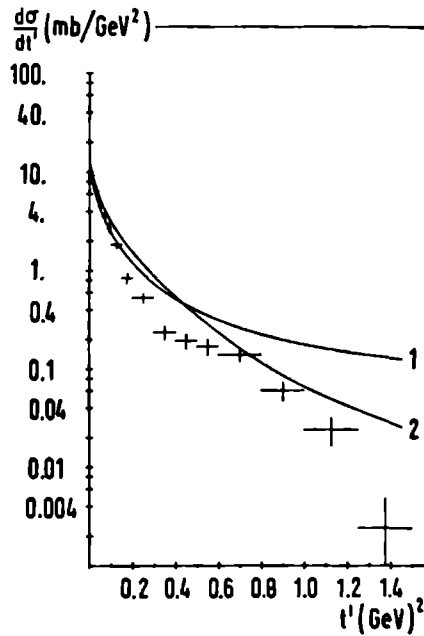


Fig.V.1. De $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$. De krommen zijn de voorspellingen van het absorptie model volgens Gottfried-Jackson (1) en Dar-Watts-Weisskopf (2).

van t' met de absorptie model voorspellingen volgens Gottfried-Jackson en Dar-Watts-Weisskopf. Voor de berekeningen is gebruik gemaakt van het CERN Absorptie-model programma van Svensson en Keyser⁽¹⁵⁾. De waarden van de gebruikte parameters is gegeven in tabel V.2.

Tabel V.2. Gebruikte waarden van de parameters voor de absorptie modellen.

Reactie	G.-J. model				D-W-W model		koppelings-constanten
	γ_1	γ_2	C_1	C_2	R	d	
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}\rho^0$	0,032	0,008	0,75	1,0	4,2	0,52	$\left(\frac{G^2}{4\pi}\right) P_{\pi\Delta}=0,375$ $\left(\frac{f^2}{4\pi}\right) \pi\rho\pi =2,6$
$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}\omega^0$	0,032	0,016	0,75	1,0	4,2	0,52	$(G^2/4\pi)P_{\rho\Delta}=36,0$ $(f^2/4\pi)\pi\rho\omega=10,0$

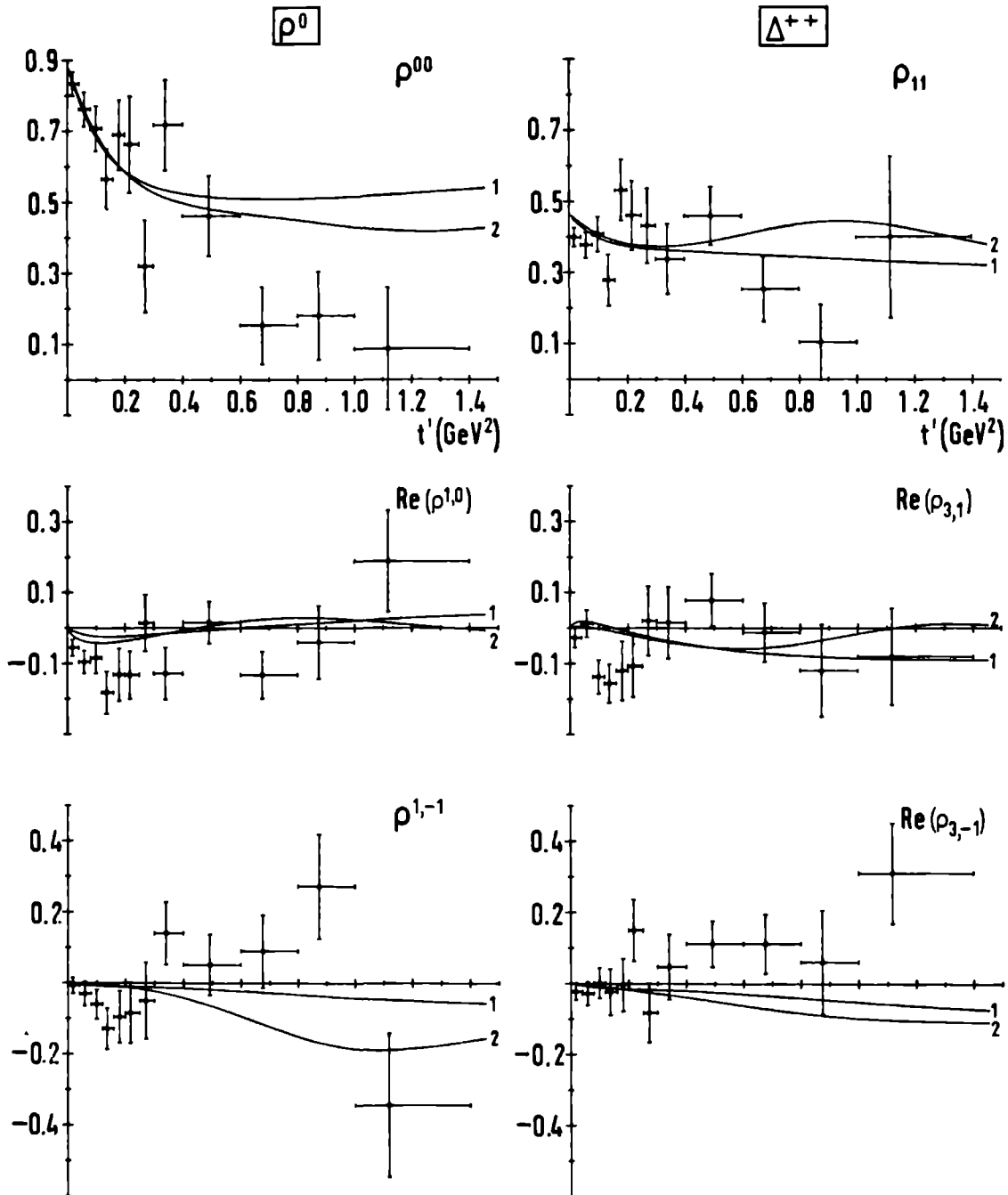


Fig.V.2. De spin dichtheidsmatrix elementen van de afzonderlijke resonanties Δ^{++} en ρ^0 als functie van t' . De krommen zijn de voorspellingen van het G-J (1) en het D-W-W (2) absorptie model.

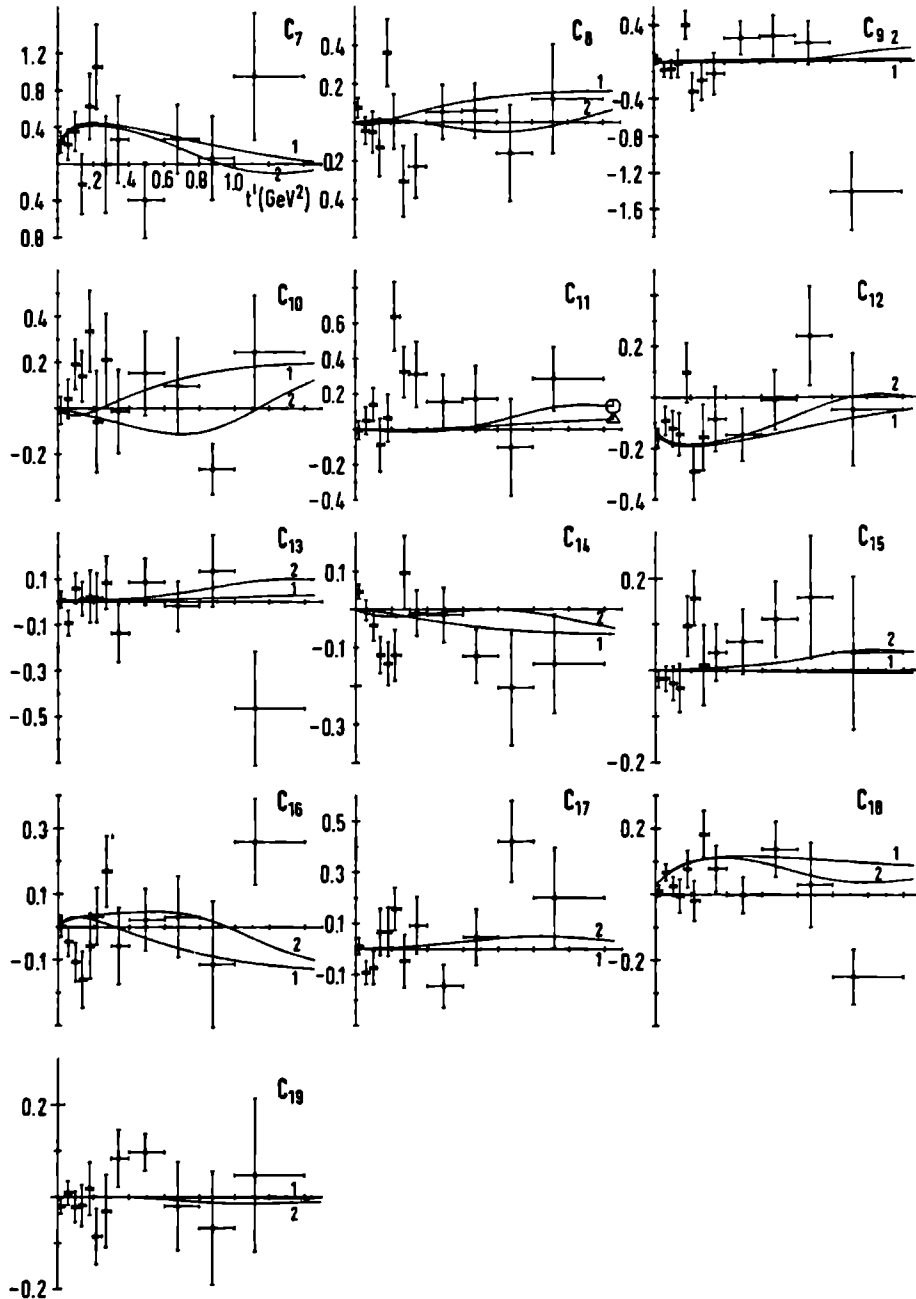


Fig.V.3. De "echte" correlatie termen voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ als functie van t' . De krommen zijn de G-J (1) en D-W-W (2) absorptie model voorspellingen.

Voor kleine t' -waarden ($t' \leq 0,4 \text{ GeV}^2$) geven beide modellen ongeveer dezelfde resultaten. De predicties van de $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling zijn voor $t' < 0,2 \text{ GeV}^2$ in goede overeenstemming met het experiment, voor grotere waarden van t' liggen de krommen te hoog.

Bij de diagonaal-elementen ρ^{00} (voor ρ^0) en ρ_{11} (voor Δ^{++}) en de correlatietermen (cf. par. III.b.2) C_7 , C_{12} en C_{18} , die alle in de voorwaartse richting van nul kunnen verschillen, is de overeenstemming tussen beide modellen en experiment goed. Voor de termen met $|\lambda-\mu|=2$ (cf. tabel IV.5) zijn zowel de absorptie model voorspellingen als de experimentele waarden in het beschouwde t' -gebied ongeveer gelijk nul. Bij de matrix elementen met $|\lambda-\mu|=1$ zijn de afwijkingen groter en wel speciaal voor $\text{Re}\rho^{10}$ (bij ρ^0) en $\text{Re}\rho_{31}$ (bij Δ^{++}).

b) De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$ (ρ -B uitwisseling).

Bij de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$ zijn er ook twee kandidaten voor het uitgewisselde meson: het vector meson ρ (massa 0,76 GeV) en het pseudo-vector meson B (massa 1,21 GeV). Aanvankelijk werd verondersteld dat het proces door ρ uitwisseling werd beheerst. Omdat het Jackson absorptie model met ρ uitwisseling niet goed in overeenstemming was met de experimentele gegevens ontstond hieromtrent twijfel.

In fig. V.4 en V.5 vergelijken we de $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling en de spin dichtheids-

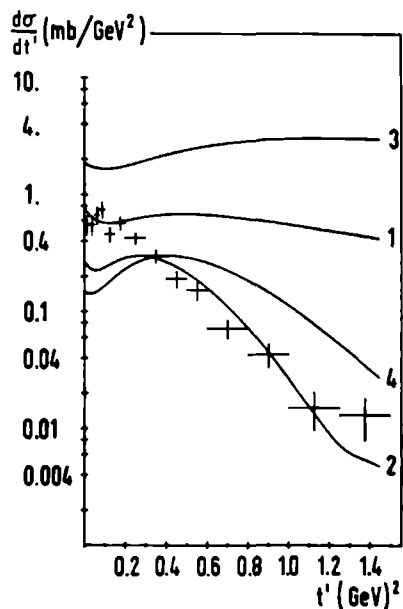


Fig.V.4. De $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling voor de reactie $\Delta^{++} \omega^0$. De krommen (1) en (3) zijn de G-J absorptie model voorspellingen voor resp. ρ - en B-uitwisseling. De krommen (2) en (4) zijn de D-W-W absorptie model voorspellingen voor resp. ρ - en B-uitwisseling.

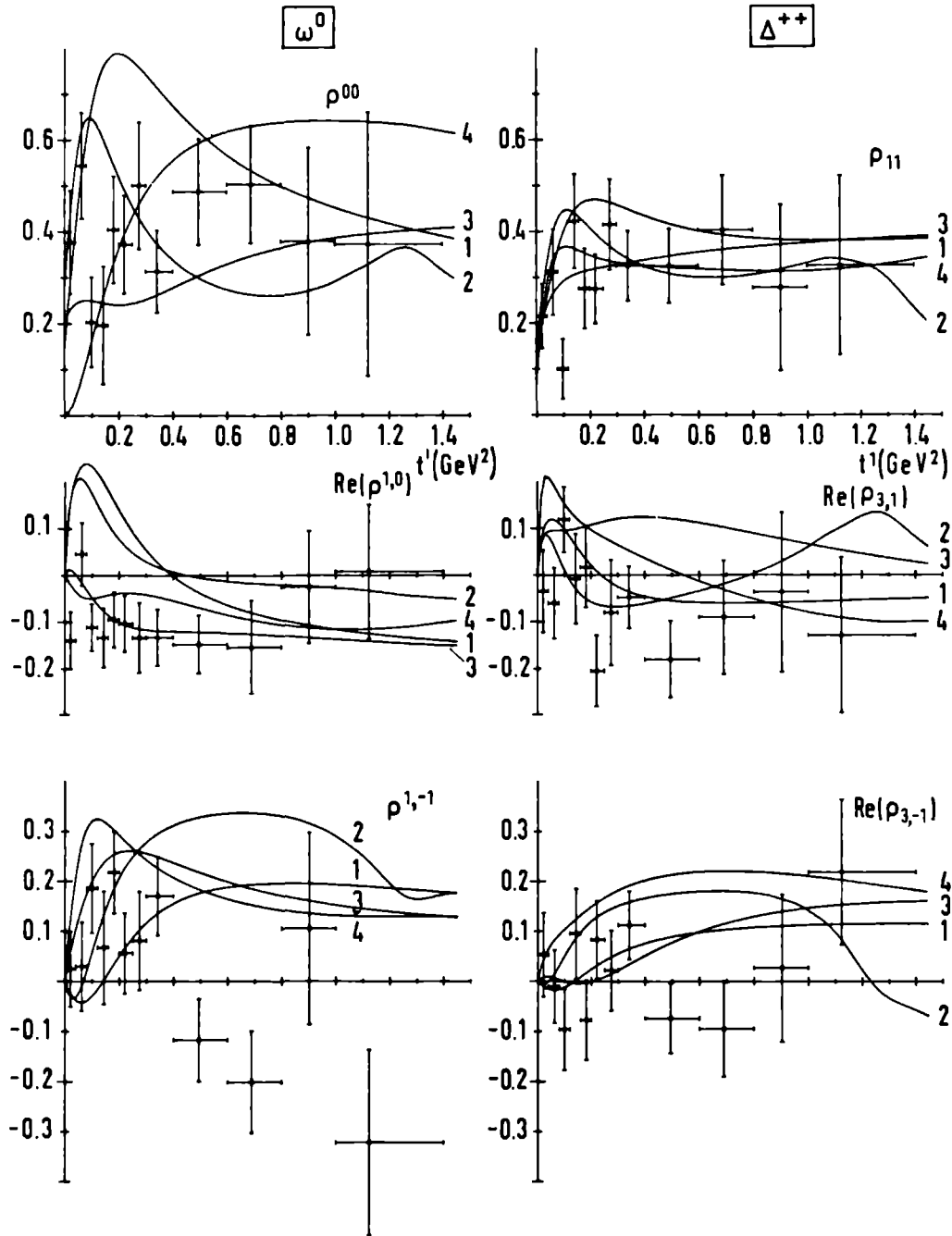


Fig.V.5. De spin dichtheidsmatrix elementen van de afzonderlijke resonanties Δ^{++} en ω^0 als functie van t' . De krommen (1) en (3) zijn de G-J absorptie model voorspellingen voor resp. ρ - en B-uitwisseling. De krommen (2) en (4) zijn de D-W-W absorptie model voorspellingen voor resp. ρ - en B-uitwisseling.

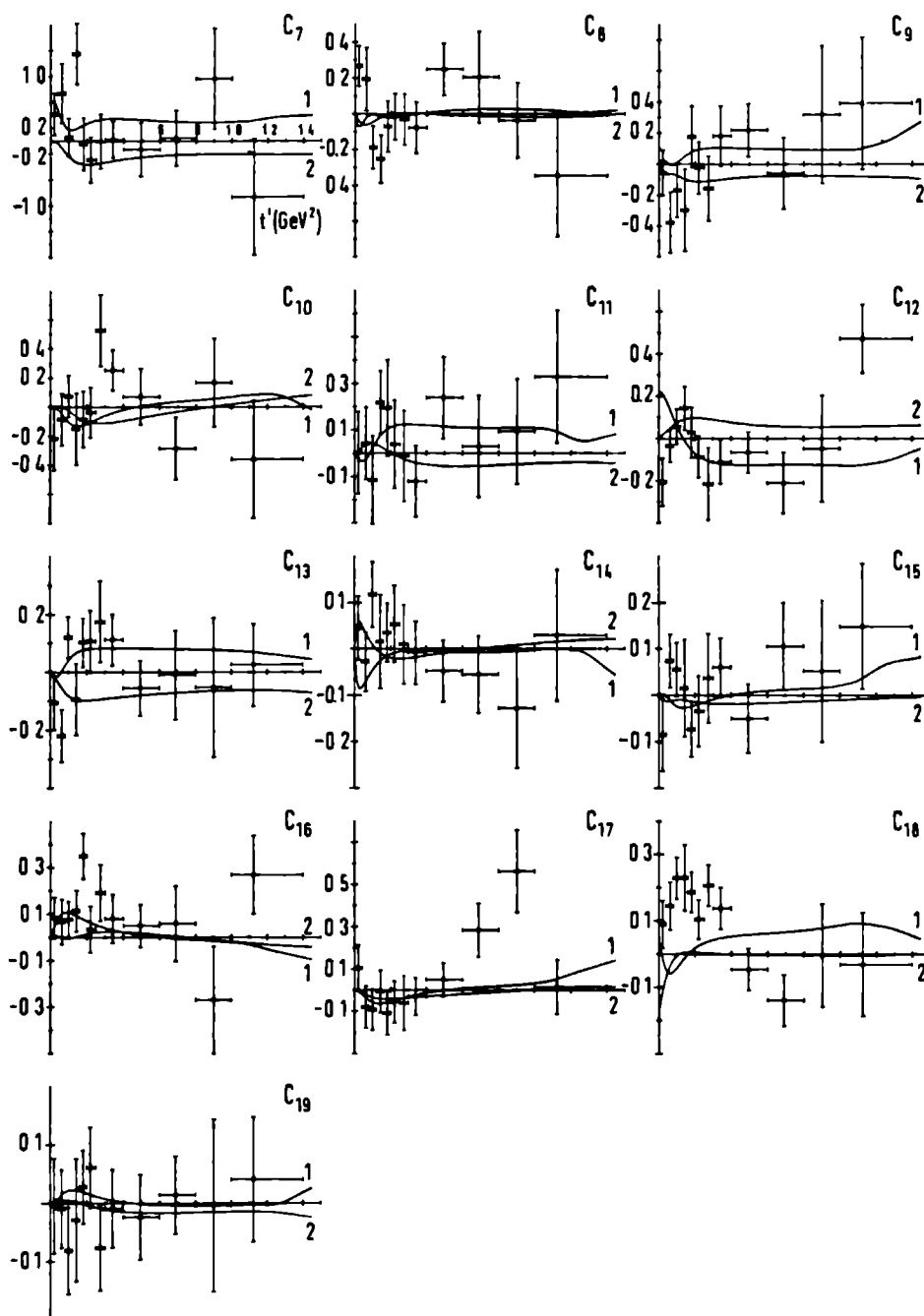


Fig.V.6. De "echte" correlatie termen voor de reactie $\Lambda^{++} \omega^0$ als functie van t' . De krommen zijn de D-W-W absorptie model voor-
 spellingen voor ρ -uitwisseling (1) en B-uitwisseling (2).

matrix elementen van de Δ^{++} en ω^0 met het G.-J. en D.-W.-W. absorptie model voor zowel ρ - als B-uitwisseling. In fig. V.6 worden de "echte" correlatie termen gegeven tesamen met de D.-W.-W. absorptie model voorspellingen voor ρ - en B-uitwisseling.

Bij de ρ uitwisseling komen in de baryon vertex functie drie koppingsconstanten voor G_1 , G_2 en G_3 (App. B5 van Ref. (1)) en één koppingsconstante voor de meson vertex functie (App. A8 van Ref.(1)). Overeenkomstig het Sakurai-Stodolski model⁽¹⁶⁾, gebaseerd op de ρ -foton analogie, stelt men⁽¹⁷⁾ $G_1 = G_2 = G$ en $G_3 = 0$.

De gebruikte waarden van G en f zijn tesamen met de absorptieparameters in tabel V.2 gegeven.

Voor de uitwisseling van het pseudo-vector meson B is de baryon vertex functie op een factor γ_5 (Dirac matrix) na gelijk aan die voor ρ uitwisseling. Het Sakurai-Stodolski model is nu niet van toepassing. De meson vertex functie bevat twee koppingsconstanten f_1 en f_2 ⁽¹⁸⁾. Behalve een betrekking tussen f_1 , f_2 en de levensduur van B meson (bekend uit het verval $B \rightarrow \omega\pi$), is over deze koppingsconstanten niets bekend. Bij de berekening hebben we gebruik gemaakt van de verhouding van de koppingsconstanten zoals deze door Aderholz⁽¹⁸⁾ zijn verkregen uit een kleinste kwadraten aanpassing van de Gottfried-Jackson absorptie model voorspellingen aan de spin dichtheidsmatrix elementen van dezelfde reactie bij 8 GeV/C. De gebruikte waarden zijn gegeven in tabel V.3. Hierbij is het product $(G_1 \cdot f_1)_B$, geheel willekeurig, gelijkgesteld aan $(G_1 \cdot f_1)_\rho$.

Tabel V.3. Gebruikte koppingskonstanten voor B-uitwisseling.

G_2/G_1	G_3/G_1	f_2/f_1	$G_1 \cdot f_1$
2,93	2,19	-0,75	360

De curven voor de $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling zoals deze uit het G.-J. model voortkomen verlopen praktisch horizontaal en sluiten niet aan bij de experimentele verdeling. Van de D-W-W model voorspellingen sluit die

welke op ρ -uitwisseling is gebaseerd het beste aan bij de experimentele verdeling, alhoewel ook hier de overeenstemming in de extreem voorwaartse richting niet goed is.

Het blijkt dat voor de Δ^{++} spindichtheidsmatrix elementen de vier curven onderling geen grote verschillen vertonen en redelijk goed bij de data aansluiten. Bij de ω^0 spindichtheidsmatrix elementen sluiten voor beide modellen de curven die op B-uitwisseling berusten beter aan bij de experimenteel bepaalde waarden dan die voor ρ uitwisseling. Het meest opvallende is echter dat voorspellingen (speciaal voor de ω^0 spindichtheidsmatrix elementen) sterk model afhankelijk zijn, d.w.z. van de wijze waarop absorptie in rekening is gebracht. Op grond van de hoge massa van het uitgewisselde meson in vergelijking met de pion massa verwacht men dit ook omdat nu overwegend de golven met een lage l-toestand tot de reactie bijdragen.

Zoals reeds is opgemerkt zijn de gebruikte koppelingsconstanten voor B-uitwisseling (cf. tabel V.3) bepaald uit een kleinste kwadraten aanpassing van de met het G-J absorptie model berekende waarden van de spindichtheidsmatrix elementen. Aangezien deze waarden sterk afhankelijk van de wijze waarop absorptie in rekening wordt gebracht en bovendien uit de $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling blijkt dat dit in het G-J model niet op juiste wijze geschiedt, zijn de waarden van deze koppelingsconstanten niet betrouwbaar.

De onzekerheid aangaande koppelingsconstanten en de wijze waarop absorptie in rekening gebracht moet worden maken het moeilijk op grond van de absorptie model voorspellingen te beslissen welke de aard van het uitgewisselde meson is in de reactie $\Delta^{++}\omega^0$: ρ , B of een combinatie van beide.

V.d. Conclusies.

Samenvattend kan men stellen dat beide versies van het absorptie model redelijk goede resultaten geven voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ in het lage t' -gebied (π -uitwisseling).

Voor de reactie Δ^{++} met ρ -uitwisseling zijn de berekende waarden van de $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling, zowel wat betreft vorm als absolute hoogte, in het D-W-W model duidelijk beter dan in het G-J model. Afgezien van de

extreem voorwaartse richting zijn de resultaten van het D-W-W model in overeenstemming met de experimentele waarden. De voorspellingen van de ω^0 -spindichtheidsmatrix elementen zijn evenwel niet goed.

Tracht men de reactie $\Delta^{++}\omega^0$ met B-uitwisseling te beschrijven dan zijn de predicties voor de vorm van de $\frac{d\sigma}{dt}$ -verdeling zowel in het G-J model als het D-W-W model niet goed. Daar de koppelingsconstanten niet bekend zijn kan men over de absolute hoogte van de curven geen uitspraak doen. De voorspellingen van de spindichtheidsmatrix elementen zijn beter dan voor ρ -uitwisseling het geval was.

V.e. Enkelvoudige Regge pool modellen.

Regge pool theorie heeft betrekking op twee met elkaar in verband staande zaken.

1). Door middel van zg. Reggebanen wordt er een verband gelegd tussen deeltjes met dezelfde zg. interne quantumgetallen (baryon getal, isospin, G-pariteit, vreemdheid) maar met verschillende spin.

2). Door uitwisseling van deze Reggebanen wordt een dynamische beschrijving gegeven van het gedrag van reacties bij hoge energie.

Het verband tussen beide onderdelen van de theorie wordt verkregen door gebruik te maken van het begrip "crossing". Bezie men de fig. V.7 dan kan men hiermee verschillende reacties associëren. Volgens de Feynman regels kan men nl. elke pijl op twee wijzen interpreteren. De pijlen kunnen voorstellen de inkomende deeltjes a, b, \bar{c} en \bar{d} (\bar{c} en \bar{d} zijn de antideeltjes van c en d) met 4-impuls p_1, p_2, p_3 en p_4 , maar ook de uitgaande deeltjes \bar{a}, \bar{b}, c en d (\bar{a} en \bar{b} zijn de antideeltjes van a en b) met de 4-impuls $-p_1, -p_2, -p_3$ en $-p_4$.

Zo stelt fig. V.7 o.m. de reactie voor waarbij a en b de inkomende deeltjes zijn (4-impuls p_1 en p_2) en c en d de uitgaande deeltjes zijn (4-impuls $-p_3$ en $-p_4$):

$$a + b \rightarrow c + d \quad (s\text{-kanaal reactie}).$$

De amplitude voor deze reactie kan men (voor het geval men eenvoudigheidshalve afziet van de spin van de deeltjes) uitdrukken in twee Mandelstam variabelen (zie App. A2), de energie variabele s en de

impulsoverdracht t : $A(s, t)$, waarbij

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_1 - (-p_3))^2.$$

Evenzo stelt fig. V.7. de reactie voor waarbij a en \bar{c} de inkomende deeltjes zijn (4-impuls p_1 en p_3) en \bar{b} en d de uitgaande deeltjes (4-impuls $-p_2$ en $-p_4$):

$$a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d \quad (t\text{-kanaal reactie}).$$

De reactie amplitude laat zich uitdrukken in de energie variabele \bar{s} en de impulsoverdracht \bar{t} : $\bar{A}(\bar{s}, \bar{t})$ met

$$\bar{s} = (p_1 + p_3)^2$$

$$\bar{t} = (p_1 - (-p_2))^2.$$

Tussen de variabelen s en t voor het eerste en \bar{s} en \bar{t} voor het tweede proces bestaat dus het verband $\bar{s} = t$ en $\bar{t} = s$. Dit betekent ook dat in het geval van de t -kanaal reactie de variabelen t en s zodanige waarden aannemen dat ze niet meer geïnterpreteerd kunnen worden als impulsoverdracht resp. energie als in het geval van de s -kanaal reactie. Hetzelfde geldt voor de variabelen \bar{t} en \bar{s} bij het s -kanaal proces. In fig. V.8 zijn de fysisch toegestane waarden van s en t voor beide reacties aangegeven.

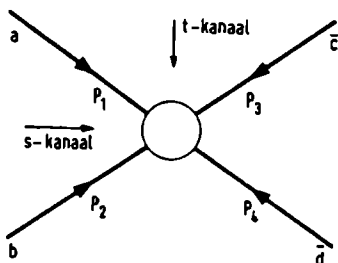


Fig.V.7. De s - en t -kanaal reacties en de definities van de 4-impuls-vectoren.

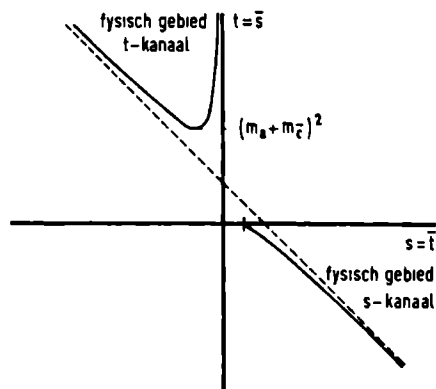


Fig.V.8. Fysisch gebied van de s -kanaal reactie $a+b \rightarrow c+d$ en de t -kanaal reactie $a+\bar{c} \rightarrow \bar{b}+d$.

"Crossing" wil nu zeggen dat (weer afgezien van de spin van de externe deeltjes) de amplituden van beide reacties, welke gedefinieerd zijn in verschillende gebieden van het s - t vlak, gegeven worden door één en dezelfde analytische functie, m.a.w.:

$$A(s, t) = \bar{A}(\bar{s}=t, \bar{t}=s)$$

waarbij het rechterlid de analytische voortzetting is van de t -kanaal amplitude $\bar{A}(\bar{s}, \bar{t})$ naar de (voor het t -kanaal onfysische) waarden $\bar{s} = t, \bar{t} = s$.

Op deze wijze kan men bv. het hoge energie gedrag van de s -kanaal reactie $a + b \rightarrow c + d$ (fig. V.9a) in verband brengen met de lage energie t -kanaal amplitude voor het proces $a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d$ (fig. V.9b).

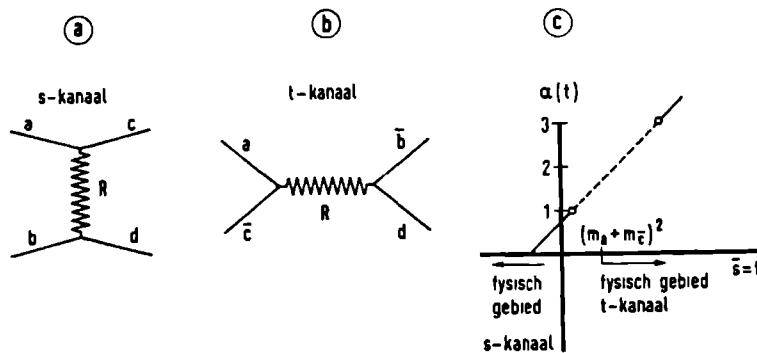
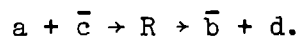


Fig.V.9. De hoge energie s -kanaal reactie veroorzaakt door Reggepool uitwisseling (a), de lage energie t -kanaal reactie waarin resonantie vorming optreedt

(b) en het Chew-Frautschi diagram voor een Reggebaan met oneven signatuur (c). Deze Reggebaan geeft aanleiding tot resonanties met spin 1 en 3 in het fysisch gebied van de t -kanaal reactie en kan uitgewisseld worden in het fysisch gebied van de s -kanaal reactie.

De analytische functie welke de amplituden van beide reacties beschrijft zal, even als in Feynman theorie (zie par. V.a.1), polen hebben voor waarden van $t(= \bar{s}) = m_J^2$, waarbij m_J de massa voorstelt van een resonantie (R) met de quantumgetallen corresponderend met de reactie



Zoals in par. V.a.1 is opgemerkt verklaart het feit dat deze positieve waarden t dicht bij het fysische gebied van de s -kanaal reactie $a + b \rightarrow c + d$ zijn gelegen, kwalitatief waarom de differentieële werkzame doorsnede van deze reactie een piek vertoont voor kleine, negatieve, waarden van t (voorwaartse richting). Tracht men echter voor

$s \rightarrow \infty$ en kleine $|t|$ $A(s,t)$ te beschrijven door een som van deze vaste pooltermen dan geraakt men in moeilijkheden. De bijdrage van een pool corresponderend met spin J wordt volgens Feynman theorie nl. gegeven door⁽³⁾:

$$A(s,t) = G_J^2 \frac{P_J(\cos \vartheta_t)}{m_J^2 - t} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} G_J^2 \frac{(-s/s_0)^J}{m_J^2 - t} \sim s^J$$

Voor $J \geq 1$ zouden dergelijke bijdragen aanleiding geven tot een werkzame doorsnede voor de s -kanaal reactie die constant is of zelfs met de energie toeneemt, hetgeen strijdig is met de waarnemingen. In plaats van een sommatie van pool bijdragen van resonanties met willekeurige (vaste) spin J , beschouwt men daarom de uitwisseling van een Reggebaan welke de gezamenlijke invloed van een familie polen met dezelfde interne quantumgetallen en willekeurige spin beschrijft.

Dit model voor relativistische verstrooiingsprocessen tussen elementaire deeltjes, is een extrapolatie van het werk van T. Regge in verband met laag-energetische potentiaal verstrooiing. Regge ging uit van de dynamische prescriptie gegeven door de Schrödinger vergelijking. Voor dit geval heeft hij kunnen aantonen dat, indien men de partiële verstrooiingsamplituden opvat, niet slechts als analytische functies van de energie E , maar ook uitbreidt tot analytische functies van het impulsmoment l , deze amplituden polen bevatten voor complexe waarden $l = \alpha(E)$. De plaats van deze polen is een functie van de energie E . Men noemt $\alpha(E)$, die een in het complexe vlak bewegende pool beschrijft, de trajectorie functie of de baan van de Reggepool. Deze functie interpoleert a.h.w. tussen gehele (fysische) waarden van l . Wanneer de energie E een zodanige waarde aanneemt dat $\alpha(E) = l_0$ (l_0 geheel en positief) is er sprake van een gebonden toestand ($E < 0$) dan wel een resonantie ($E > 0$).

Naar analogie met de potentiaal verstrooiing neemt men nu ook in relativistische verstrooiingsprocessen analyticiteit in het complexe J -vlak en het bestaan van bewegende Regge polen $\alpha(t)$ aan. In het geval dat t correspondeert met de energie variabele ($t = \bar{s} > 0$ in de

t-kanaal reactie) worden op deze wijze resonanties met verschillende spins $J = \text{Re } \alpha(m_J^2)$, maar met dezelfde interne quantumgetallen verbonden. Wanneer men $\text{Re } \alpha(m_J^2)$ tegen m_J^2 uitzet voor een dergelijke familie deeltjes blijkt experimenteel dat het verband goeddeels lineair is (zie fig. V.9.c).

Men kan aantonen dat de pooltermbijdragen tot de amplitude in het lage energie gebied van de t-kanaal reactie ($\bar{s} (= t) > 0$ en $\bar{t} (= s) < 0$) overheersend worden voor zeer grote waarden van \bar{t} en kleine waarden van \bar{s} . Door de crossing relatie volgt hieruit dat de amplitude van de s-kanaal reactie in het hoge energie gebied ($s \gg 0$, $t < 0$) beschreven kan worden door de uitwisseling van een Reggebaan, mits $|t|$ klein is.

Men neemt i.h.a. aan dat $\alpha(t)$ hier reëel is ($t < 0$) en de extrapolatie is van de functie $\text{Re } \alpha(t)$ die voor $t > 0$ de massa's van de verschillende resonanties lineair verbindt (zie fig. V.9.c). De Reggebaan draagt dezelfde interne quantumgetallen (baryon getal, isospin, G-pariteit) als de deeltjes die er op gelegen zijn voor $t = m_J^2 > 0$. De amplitude heeft voor $s \gg 0$ en $t < 0$ de vorm:

$$A_{\{\lambda_t\}}(s, t) = \sum f_{\{\lambda_t\}}(t) \beta_{\{\lambda_t\}}(t) \xi(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)} \quad \text{V.7.}$$

Het somteken in het rechterlid van deze formule treedt op wanneer meer combinaties van interne quantumgetallen kunnen worden uitgewisseld in het t-kanaal, overeenkomend met verschillende Reggebanen. De index $\{\lambda_t\}$ duidt de t-kanaal helicitetstoestand van de inkomende en uitgaande deeltjes aan. De betekenis van de diverse factoren in form. V.7 is als volgt:

1) $\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)}$ geeft de energie afhankelijkheid van de amplituden (s_0 is schaalfactor). Een som van verschillende Reggebanen zal voor $s \rightarrow \infty$ benaderd kunnen worden door alleen de "leidende" Reggebanen te beschouwen, d.w.z. alleen deze banen waarvoor $\alpha(t)$ (reëel voor $t < 0$) het grootst is.

2) $f(t)$ is een functie die kinematische factoren bevat. Deze functie treedt i.h.a. eerst op als de externe deeltjes spin hebben en bevat dan o.a. factoren die het gedrag op grond van behoud van totaal

impulsmoment van de s-kanaalreactie beschrijven. In het algemeen is $f(t)$ ook afhankelijk van $\alpha(t)$ (zie par. V.f).

3) $\beta(t)$ wordt de (gereduceerde) residue functie genoemd. Men neemt aan dat, nadat de te verwachten t -afhankelijkheid is geëxtraheerd en in $f(t)$ is ondergebracht, $\beta(t)$ een langzaam veranderende functie van t is. Evenals voor $f(t)$ wordt voor de functie $\beta(t)$ meestal aangenomen dat ze zg. factoriseerbaar is, d.w.z. te schrijven als het product van twee factoren die de koppeling a-Reggebaan-c, resp. de koppeling b-Reggebaan-d betreffen (zie fig. V.9.a). Door de eigenschap van factoriseerbaarheid van de residue functies is het mogelijk verschillende amplituden (corresponderend met de uitwisseling van dezelfde Reggebaan) van dezelfde of andere reacties met elkaar in verband te brengen.

4) De fase van de amplitude wordt bepaald (daar $\beta(t)$ evenals $\alpha(t)$ reëel veronderstelt mag worden) door de zg. signatuurfactor $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{1 + \tau \exp(-i\pi\alpha(t))}{\sin \pi \alpha(t)}.$$

Deze vindt zijn oorsprong in het feit dat alleen een voortzetting in het complexe J -vlak kan worden gevonden voor die delen van de t -kanaal amplituden die even ($\tau = +$), dan wel oneven ($\tau = -$) J bevatten. Hiermee komt overeen dat $\xi(t)$ in het gebied $t > 0$, alleen dan polen bevat als $\exp(-i\pi\alpha(t)) = \tau 1$, d.w.z. voor $J = \operatorname{Re} \alpha(m_J^2) = \text{even (oneven)}$ al naargelang $\tau = +(-)$. In het algemeen worden gehele waarden van $\operatorname{Re} \alpha(t) = \text{even (oneven)}$ voor $\tau = +(-)$ "right signature points" (r.s.p.) genoemd; de andere gehele waarden van $\operatorname{Re} \alpha(t) = \text{oneven (even)}$ voor $\tau = +(-)$ heten "wrong signature points" (w.s.p.). De functie $\xi(t)$ bevat polen voor r.s.p.; voor w.s.p. is ze eindig. Op een Reggebaan met $\tau = +(-)$ liggen bijgevolg inderdaad alleen resonanties met even (oneven) J resp..

Het optreden van de signatuur τ in Regge theorie vindt zijn analogon in potentiaal theorie wanneer er naast de directe potentiaal nog een zg. verwisselingspotentiaal bestaat.

Wanneer twee Reggebanen met tegengestelde signatuur en pariteit doch gelijke isospin samenvallen spreekt men daarom wel van verwisselingsontaarding. Een (mogelijk) voorbeeld hiervan vormen de ρ -baan ($I=1, P=-, \tau=-$) en de A_2 -baan ($I=1, P=+, \tau=+$).

V.f. Minima in de differentiële werkzame doorsnede.

Een minimum in de differentiële werkzame doorsnede of een andere gemeten grootte bij een waarde van de impulsoverdracht $t = t_0$ wordt meestal in verband gebracht met het feit dat $\alpha(t)$ voor $t = t_0$ een gehele waarde (j_0) aanneemt. Het al of niet optreden van zo een minimum is afhankelijk van het gedrag van de functies $\xi(t)$, $f(t)$ en $\beta(t)$ van form. V.7 in deze punten.

De kinematische factor $f(t)$ is afhankelijk van de spintoestand van de inkomende en uitgaande deeltjes. Beschouwt men een gehele waarde van $\alpha(t)$ dan noemt de overgang aan een vertex bv. a-Regge-baan-c, in fig. V.3, een "sense" of "non-sense" transitie alnaar gelang zij wel of niet in overeenstemming is met de fysisch toegestane waarden van het impulsmoment. Zo heet een overgang:

- 1) een "sense" transitie (s) als de verandering in heliceit tussen inkomend en uitgaand deeltje $\lambda (= |\lambda_a - \lambda_c|) \leq \alpha(t_0)$.
- 2) een "non-sense" transitie (n) als $\lambda > \alpha(t_0)$.

Overgaande naar de amplituden kan men deze verdelen in:

ss-amplituden: aan beide vertices een s-transitie.

sn-amplituden: aan een vertex een s-transitie en aan de andere vertex een n-transitie.

nn-amplituden: aan beide vertices een n-transitie.

Men kan nu aantonen dat de functie $f(t)$ een factor $(\alpha(t) - j_0)^m$ bevat, waarbij $m=0$ (ss-transities), $m=\frac{1}{2}$ (sn-transities) of $m=1$ (nn-transities) is ($j_0 = \alpha(t_0)$).

De functie $\beta_{\lambda_t}(t)$ is afhankelijk van de dynamica van het proces en is i.h.a. niet bekend. De keuze vrijheid voor het gedrag van $\beta(t)$ in de omgeving van het punt $t=t_0$ is evenwel beperkt indien men eist dat de amplituden $A(s,t)$ in dit punt geen vertakkingspunt of polen hebben en dat de residue functies factoriseerbaar zijn.

Uit de signatuurfactor $\xi(t)$, de kinematische factor $f(t)$ en de keuze van de functie $\beta(t)$ volgt in principe, overeenkomstig form.V.7, het gedrag van de amplituden $A_{\lambda_t}(s,t)$ in de omgeving van het punt $t=t_0$.

In tabel VI.4 is een aantal mogelijkheden voor dit gedrag gegeven. Hierbij geeft de eerste kolom de benaming aan die de eenvoudigste (a priori mogelijke) veronderstellingen omtrent het gedrag van $\beta(t)$ verkregen hebben.

Tabel V.4.

Mechanisme	Amplituden in r.s.p.			Amplituden in w.s.p.		
	A_{ss}	A_{sn}	A_{nn}	A_{ss}	A_{sn}	A_{nn}
Choosing sense	$\frac{1}{t-t_0}$	const	$(\alpha-j_0)$	const	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)^2$
Gell-Mann choosing non-sense	const	const	const	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)$
Chew	const	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)^2$	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)^2$	$(\alpha-j_0)^3$
Non- compensating	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)$	$(\alpha-j_0)^2$	$(\alpha-j_0)^2$	$(\alpha-j_0)^2$

V.g. Bijdragen van natuurlijke en niet-natuurlijke pariteitsuitwisseling.

Onafhankelijk van de bijzonderheden van een uitwisselingsmodel (OME- of Reggepool model) kan men uit de spin toestand van het geproduceerde meson in de reactie $\pi^+ p \rightarrow V^0 \Delta^{++}$ aanwijzingen vinden omtrent de spin-pariteit van het uitgewisselde object.

Door Gottfried en Jackson⁽²¹⁾ is aangetoond dat het vector meson alleen dan in de helicitetoestand 0 geproduceerd kan worden als het uitgewisselde meson een zg. niet-natuurlijke pariteit heeft ($P = -(-1)^J$). Deze bijdrage wordt door de grootheid

$$\sigma_0^- = \rho^{00} \frac{d\sigma}{dt'}$$

uit de differentiële werkzame doorsnede geprojecteerd. Ader et al.⁽²²⁾

hebben afgeleid dat in de limiet $s \rightarrow \infty$, de grootheden

$$\sigma_1^+ = (\rho^{11} + \rho^{1-1}) \frac{d\sigma}{dt},$$

en
$$\sigma_1^- = (\rho^{11} - \rho^{1-1}) \frac{d\sigma}{dt}$$

de bijdragen van natuurlijke ($P=(-1)^J$) resp. niet-natuurlijke pariteitsuitwisseling tot de productie van het vector meson in helicitetoestand 1 isoleren.

De natuurlijke pariteitsbijdrage σ_1^+ komt overeen met de D.H. parameter β . De niet-natuurlijke pariteitsbijdrage σ_1^- en σ_0^- zijn, voorzover $\text{Re}(\rho^{10})$ te verwaarlozen is, gelijk aan de parameters α en γ .

Daar de grootheid σ_1^+ invariant is voor rotaties van het assenstelsel om de normaal op het productievlak geldt de opsplitsing in σ^+ en $\sigma^- (= \sigma_0^- + \sigma_1^-)$ zowel in het t-kanaal helicititeitssysteem als het s-kanaal helicititeitssysteem (door ons in Hfdst.III aangeduid als resp. Jackson- en helicititeitssysteem).

V.h. Bespreking van de experimentele resultaten.

In deze paragraaf worden bijzonderheden van de experimentele resultaten m.b.t. de differentiële werkzame doorsnede en spin dichtheidsmatrix-elementen van de reacties $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$, $\Delta^{++} \omega^0$ en $\Delta^{++} \rho^0$ besproken in het licht van enkelvoudige Reggepool modellen.

V.h.1. De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$.

Op grond van de quantumgetallen der betrokken deeltjes kan van de bekende mesonen alleen A_2 -uitwisseling tot de reactie bijdragen. In fig. V.10 is de $\frac{d\sigma}{dt}$ verdeling van de reactie gegeven. De kromme in deze figuur toont de voorspelling bij 5 GeV/C van een zuiver A_2 -Reggepool model volgens Krammer en Maor⁽²³⁾. De parameters zijn door aanpassing aan reacties bij verschillende energiën bepaald. De duidelijke inzinking in de voorwaartse richting (ongeveer 3 standaard deviaties) welke door het model wordt voorspeld is ook opgemerkt door Grether en Gidal⁽³¹⁾.

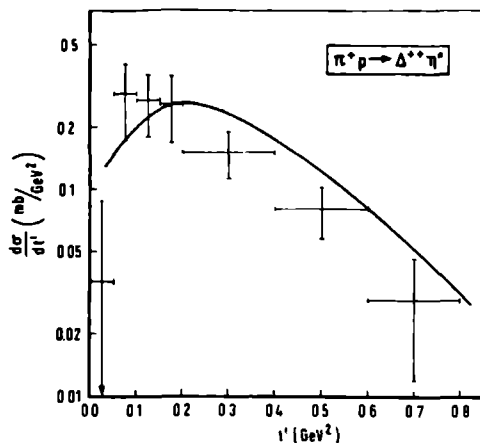


Fig.V.10. De $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling voor de reactie $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\eta^0$. De kromme is de Reggepool model voorspelling volgens Krammer en Maor (A_2 -uitwisseling).

De waarden van de spin dichtheidsmatrix elementen van de Δ^{++} (cf. par.IV.e) zijn in overeenstemming met het Sakurai-Stodolski model⁽¹⁶⁾. Dit laatste en de inzinking in de $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling voor $t' \approx 0$ houden in dat er een sterke bijdrage moet zijn van amplituden met spin-flip 1 aan de baryon vertex.

Indien de A_2 -baan verwisselingsontaard is met de ρ -baan - waarvoor de aanwijzingen evenwel niet eenduidig zijn - verwacht men dat $\alpha_{A_2} = 0$ wordt voor $t' \approx 0,6 \text{ GeV}^2$. Dit punt is voor de A_2 -baan, welke een positieve signatuur heeft, een r.s.p., terwijl de spin-flip amplitude in dit punt van het type (sn) is. Daar het choosing-sense mechanisme voor een r.s.p. niet in aanmerking komt ($A_{ss} \approx \frac{1}{t-t_0}$ volgens tabel V.4), zou de afwezigheid van een minimum bij $t' = 0,6 \text{ GeV}^2$ erop duiden dat de A_2 -baan het Gell-Mann mechanisme volgt.

V.h.2. De reactie $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\omega^0$.

In fig. V.11 zijn ρ^{00} , $(\rho^{11} - \rho^{1-1})$ en $(\rho^{11} + \rho^{1-1})$, zoals deze in het Jackson systeem zijn bepaald, gegeven als functie van t' . Daar het somtijds van belang is de waarde van deze grootheden in het helici-teitsstelsel te kennen wordt in dezelfde figuur het verloop van $(\rho^{00})^H$ en $(\rho^{11} - \rho^{1-1})^H$ getoond.

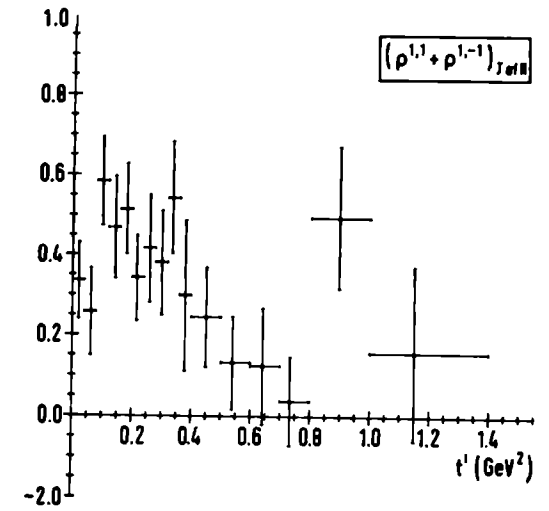
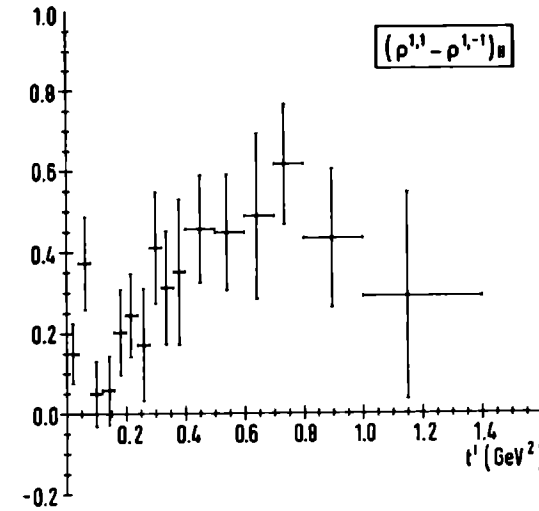
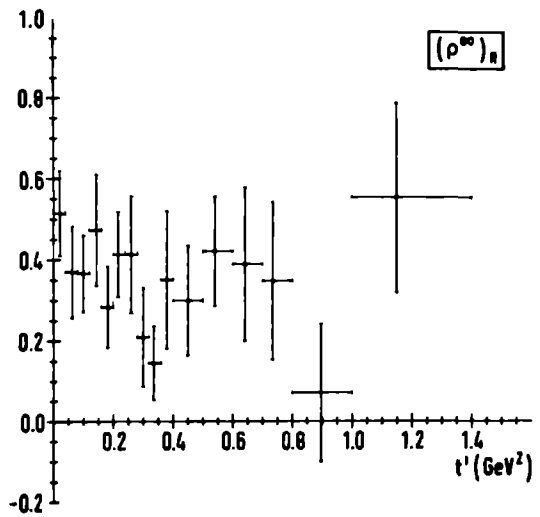
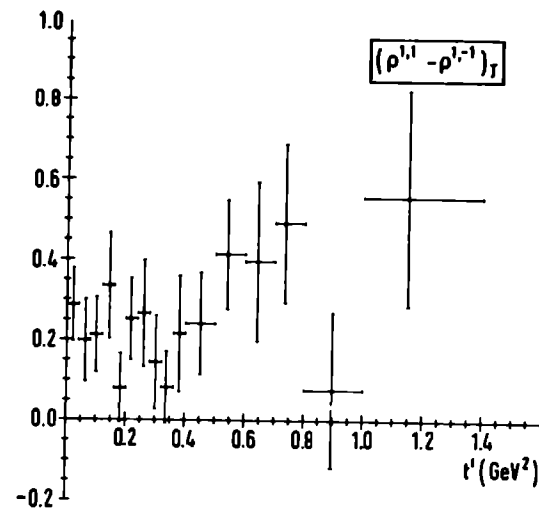
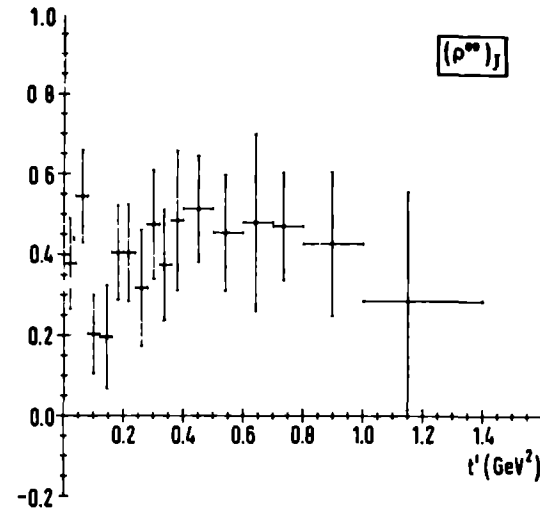


Fig.V.11. De waarden van σ_0^- , σ_1^- en σ_1^+ , berekend in het Jackson- en heliciteitssysteem voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$.

De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \omega^0$ kan zoals vroeger reeds is vermeld via ρ - en B-uitwisseling verlopen. De betrekkelijk grote waarde van ρ^{00} geeft aan dat er een duidelijke bijdrage is van niet-natuurlijke pariteitsuitwisseling. We zullen deze bijdrage eenvoudigheidshalve met "B-uitwisseling" aanduiden. De waarde van $(\rho^{11} - \rho^{1-1})$ duidt er op dat de "B-uitwisseling" ook bijdraagt tot de toestand met helicititeit = 1.

Opmerkelijk is dat de verdeling van $(\rho^{11} + \rho^{1-1})$, de bijdrage van natuurlijke pariteitsuitwisseling (" ρ -uitwisseling"), ongeveer gelijk nul wordt voor $t' \approx 0,6 - 0,8 \text{ GeV}^2$. Zulk een structuur verwacht men op grond van het feit dat $\alpha_\rho(t \approx -0,6) = 0$ is. Dit punt is voor de ρ -baan een w.s.p., terwijl de amplituden bijdragende tot σ_1^+ tenminste één "non-sense" transitie bevatten.

De $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling (fig. V.12) vertoont een kleine inzinking voor $t' \approx 0,1 - 0,15 \text{ GeV}^2$. Het feit dat deze inzinking ook zichtbaar is in

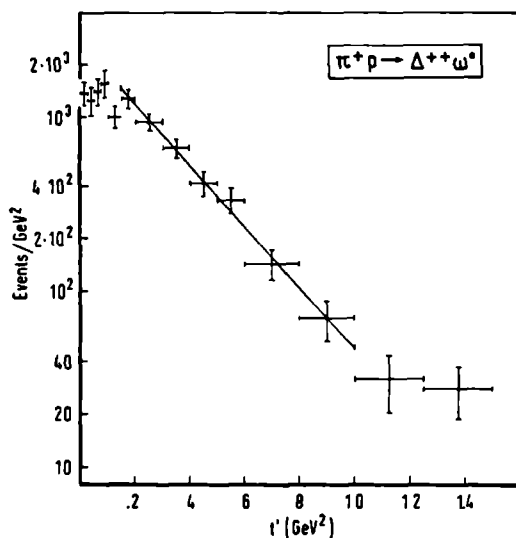


Fig.V.12. De $\frac{dN}{dt'}$ verdeling voor de reactie $\Delta^{++} \omega^0$.

de ρ^{00} -verdeling duidt er op dat dit effect afkomstig kan zijn van de niet-natuurlijke pariteitsbijdrage.

In fig. V.13 geven we de verdeling $\sigma_0^- = \rho^{00} \frac{d\sigma}{dt'}$, welke het helicititeit = 0 deel van de "B-uitwisselings" bijdrage weergeeft. Deze projectie

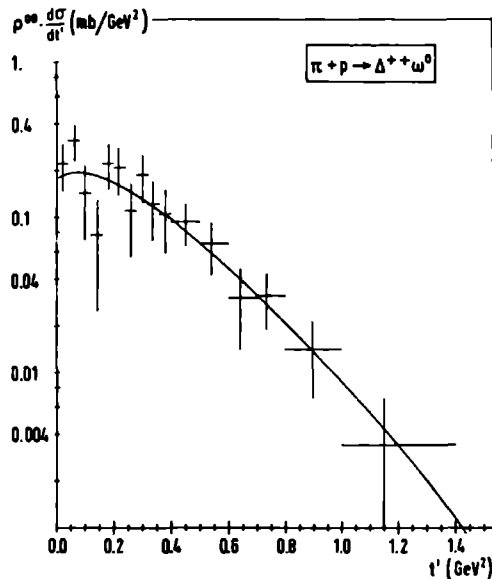


Fig.V.13. De $\rho^{00} \frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling voor de reactie $\Delta^{++} \omega^0$.

De kromme is het resultaat van een kleinste kwadraten aanpassing van het Abrams en Maor Reggepool model met π -B verwisselings-ontaarding.

versterkt het effect tot ongeveer 3 standaarddeviaties.

Högaasen en Lubatti⁽²⁴⁾ hebben dit effect in onze data geïnterpreteerd als een verdwijnen van "B-amplituden" in het punt $t = -0,25 \text{ GeV}^2$. Deze veronderstelling, welke impliceert dat $\alpha_B(t=-0,25) = 0$, is moeilijk in overeenstemming te brengen met het idee dat Reggebanen lineair zijn en parallel verlopen. Een alternatieve verklaring zou het bestaan van nog een Regge-baan zijn met niet-natuurlijke pariteit welke aan (π, ω) koppelt. Deze zg. Y-baan zou tussen de ρ - en B-baan gelegen zijn en de t -as snijden bij $t \approx -0,2 \text{ GeV}^2$ (25), (26).

De kromme in fig. V.13 is een voorspelling van een B-Regge uitwisselingsmodel beschreven door Abrams en Maor⁽²⁷⁾. Dit model, dat volledige π -B verwisselingsontaarding veronderstelt, gaat uit van de Born-term approximatie voor π -uitwisseling. De Regge uitdrukking wordt verkregen door de propagator $\frac{1}{t-m_\pi^2}$ te vervangen door

$$\pi \alpha'(0) \frac{1+\tau e^{-i\pi\alpha}}{2 \sin \pi \alpha} \frac{(1+2\alpha)(1+\frac{3}{2}\alpha) \Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{s-n}{2s_0}\right)^\alpha \quad (V.8)$$

waarbij $\alpha = \alpha'(0) [t - m_\pi^2]$, $\tau = -1$ voor B-uitwisseling en $\tau = +1$ voor π -uitwisseling.

De variabele parameters zijn de koppelingsconstante G^2 , $\alpha'(0)$ en s_0 .

De waarden van deze parameters, welke met een kleinste kwadraten aanpassing aan de σ_0^- verdeling zijn bepaald, staan vermeld in tabel V.5.

Tabel V.5. Waarde van parameters voorkomende in het Abrams-Maor model.

	$\alpha'(0)$	$2 s_0$	G^2	$G_{\text{corr.}}^2$	χ^2/ND
$\sigma_0^- \Delta^{++} \omega^0$	$1,06 \pm 0,10$	$1,07 \pm 0,09$	$0,74 \pm 0,08$	$0,90 \pm 0,10$	10,2/13
$\sigma_0^- \Delta^{++} \rho^0$	$1,17 \pm 0,08$	$1,04 \pm 0,06$	$0,61 \pm 0,06$	$0,92 \pm 0,09$	28,7/18

Afgezien van de structuur bij $t' \approx 0,15 \text{ GeV}^2$, waarvoor het model geen verklaring geeft, is het in goede overeenstemming met de data. Er is evenwel gezien de massa van het B-meson (1235 MeV) een tegenspraak tussen de veronderstelling dat de π - en B-baan lineair en verwisselingsontaard zijn en de waarde van $\alpha'(0) = (1,06 \pm 0,10)$.

Onze waarnemingen zijn in overeenstemming met die van Abrams et al. ⁽²⁸⁾ in een studie van dezelfde reactie bij 3,7 GeV/c. In het experiment van Bloodworth et al. ⁽²⁹⁾ bij 5,45 GeV/c vindt men voor deze reactie wel een inzinking in $(\rho^{11} + \rho^{1-1})$ rond $t' \approx 0,55 \text{ GeV}^2$, maar niet de structuur in $\rho^{00} \frac{d\sigma}{dt'}$ bij $t' \approx 0,2 \text{ GeV}^2$.

V.h.3. De reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$.

Van de algemeen aanvaarde mesonen kunnen π -(niet-natuurlijke pariteit) en A_2 -(natuurlijke pariteit) uitwisseling bijdragen tot deze reactie. Ook het A_1 -meson kan op grond van zijn vermoedelijke quantum getallen ($I=1, J^P=1^+$) tot deze reactie bijdragen. Veelal wordt deze bijdrage, gezien de onzekerheden m.b.t. het bestaan van deze resonantie, buiten beschouwing gelaten.

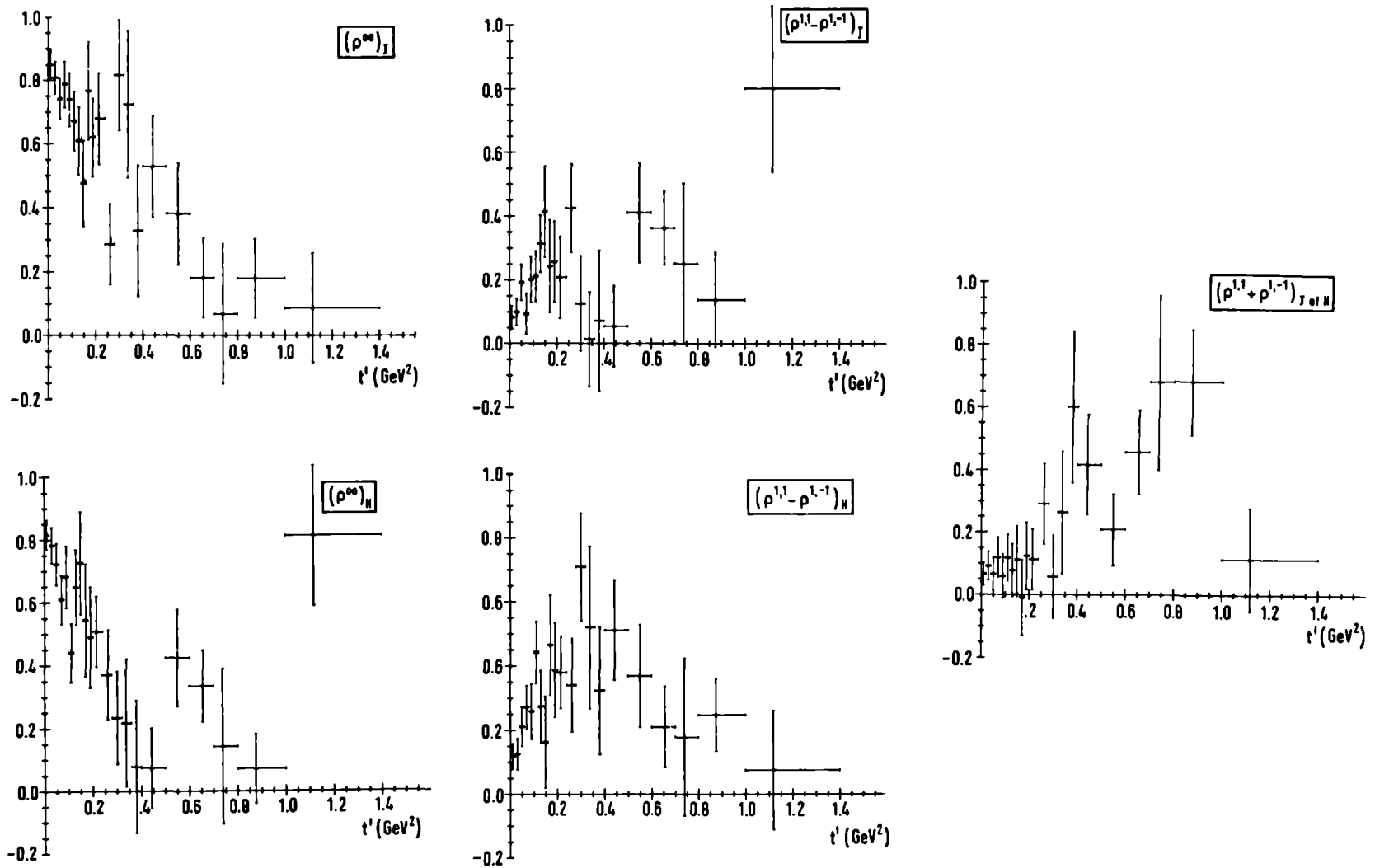


Fig.V.14. De waarden van σ_0^- , σ_1^- en σ_1^+ , berekend in het Jackson- en heliciteitssysteem voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$.

In fig. V.14 zijn wederom ρ^{00} , $(\rho^{11}-\rho^{1-1})$ en $(\rho^{11}+\rho^{1-1})$ gegeven, alsmede $(\rho^{00})^H$ en $(\rho^{11}-\rho^{1-1})^H$.

De grote waarde van ρ^{00} , in het bijzonder voor $t' \leq 0,15 \text{ GeV}^2$, duidt er op dat in de voorwaartse richting π -uitwisseling dominant is.

De $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling (fig. V.15) vertoont geen inzinking in de voorwaartse richting. Dit feit, gevoegd bij de π -uitwisselingsdominantie is een moeilijkheid in enkelvoudige Regge pool modellen. Le Bellac⁽³⁰⁾ heeft er op gewezen dat het ontbreken van een inzinking in $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling van de ladingsuitwisselingsreactie $pn \rightarrow np$, de foto productie $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ én de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ onverenigbaar is met factorisatie van de residue functies. Oplossingen worden gezocht in modellen waarin meer dan een Regge pool wordt uitgewisseld in een of meer van deze reacties⁽³⁰⁾.

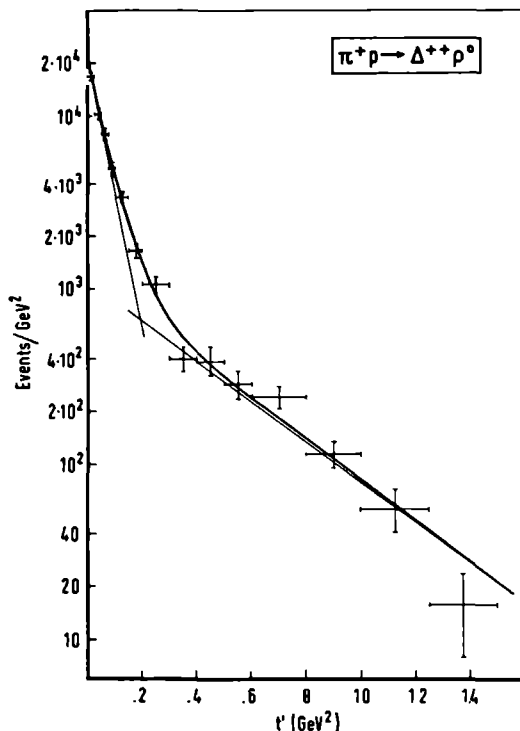


Fig.V.15. De $\frac{dN}{dt'}$ verdeling voor de reactie $\Delta^{++} \rho^0$.

Opmerkelijk is verder dat $(\rho^{11}-\rho^{1-1})$ een brede inzinking vertoont rond $t' \approx 0,4 \text{ GeV}^2$ en dat ρ^{00} nul wordt bij $t' \approx 0,75 \text{ GeV}^2$, alhoewel de statistische betekenis zeker in het laatste geval gering is. Dat ρ^{00} bij $t' \approx 0,75 \text{ GeV}^2$ gelijk nul wordt is door Abrams et al.⁽²⁸⁾ beschouwd als een aanwijzing dat in dit punt $\alpha_\pi = -1$ wordt (een w.s.p. met aan beide vertices een "non-sense" transitie).

In fig. V.16 is de $\rho^{00} \frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling weergegeven; de bijgetekende kromme is het resultaat van een kleinste kwadraten aanpassing van het

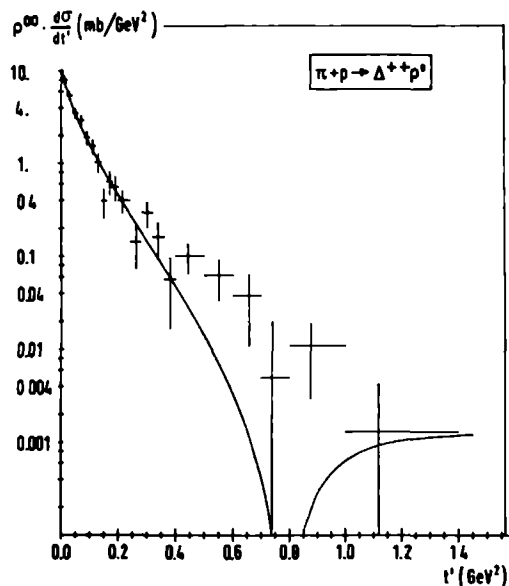


Fig.V.16. De $\rho^{00} \frac{d\sigma}{dt'}$ verdeling voor de reactie $\Delta^{++} p^0$. De kromme is het resultaat van een kleinste kwadraten aanpassing van het Reggepool model met π -B verwisselingsontoording volgens Abrams en Maor.

π -uitwisselings Regge model van Abrams en Maor (form. V.8). Voor grote waarden van t' is de overeenkomst met de experimentele punten niet bevredigend*.

De parameters $\alpha'(0)$ en $2s_0$ van de aanpassing (Tabel V.5) zijn ongeveer gelijk aan die voor B-uitwisseling in de vorige reactie (b), in overeenstemming met de veronderstelling dat de π - en B-baan verwisselingsontaard zijn.

Ervan uitgaande dat er volledige π -B verwisselingsontoording is en dat SU(3) symmetrie exact geldt moeten ook de koppelingsconstanten G^2 in beide reacties gelijk zijn. Hieraan is binnen de meetfouten voldaan als men de gecorrigeerde koppelingsconstanten met elkaar vergelijkt (zie par. V.i). De gecorrigeerde waarde zijn óók in overeenstemming met gebruikelijke waarde van de koppelingsconstante

$$G^2 = \left(\frac{G_{\pi\pi\Delta}^2}{4\pi} \right) \left(\frac{f_{\pi\rho\pi}^2}{4\pi} \right) = 0,97 \text{ (zie Tabel V.1). Door het achterwege laten}$$

* Dit resultaat werd onlangs bevestigd door Bloodworth et al. in hun reeds eerder genoemd studie.

van de hier vermelde correctie stelden Abrams en Maor ten onrechte een discrepantie vast t.a.v. deze koppelingsconstanten.

De verdeling van $(\rho^{11} + \rho^{1-1})$ (fig. V.14) geeft de bijdrage van "A₂-uitwisseling" weer. Voor waarden van $t' \leq 0,2 \text{ GeV}^2$ is deze bijdrage klein, maar voor $t' > 0,2 \text{ GeV}^2$ neemt deze snel toe. De verdeling suggereert een inzinking voor $t' \approx 0,55 \text{ GeV}^2$ (2 standaarddeviaties). Dit zou er op wijzen, wederom er van uitgaande dat de A₂-baan verwisselingsontaard is met de ρ -baan, dat de A₂-baan hier het Chew of non-compensating mechanisme volgt. In de beide reeds eerder vermelde experimenten is geen inzinking waargenomen. Dit zou inhouden dat ook hier de A₂-baan, zoals in de reactie $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \eta^0$, het Gell-Mann mechanisme volgt.

V.i. Moeilijkheden bij het vergelijken van berekende en gemeten werkzame doorsnede bij resonantie productie.

In het Regge pool model van Abrams en Maor (en ook in het absorptie model) worden de resonanties als deeltjes met een vaste massa opgevat en wordt de breedte van deze resonanties verwaarloosd.

De integraal van de Breit-Wigner curve:

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{m_0 \Gamma(m)}{(m_0^2 - m^2)^2 + m_0^2 \Gamma(m)^2} dm^2$$

is voor resonanties met zeer kleine breedte Γ gelijk aan 1. Voor brede resonanties is de integraal over het fysisch toegestane massagebied echter kleiner dan 1.

Zo is de integraal over de gehele $(p\pi^+, \pi^+\pi^-)$ Goldhaber plot van het product van de Δ^{++} en ρ^0 B.-W. formules ($\Gamma_\rho = 0,145 \text{ GeV}$, $\Gamma_\Delta = 0,110 \text{ GeV}$) slechts 0,66 maal de waarde die men vindt door $\Gamma_\rho = \Gamma_\Delta = 0$ te stellen. Hierbij is rekening gehouden met de fase ruimte verdeling over de Goldhaber plot en de t-afhankelijkheid van de reactie, zoals deze in Hfdst. II zijn beschreven.

Op dezelfde wijze vindt men dat de integraal van de Δ^{++} B.-W. formule over de $(p\pi^+, \pi^+\pi^-\pi^0)$ Goldhaber plot 0,82 is voor de reactie $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\omega^0$ (Bij deze berekening is de breedte van de ω^0 resonantie verwaarloosd).

Om deze reden hebben wij de uit het D-W-W absorptie model volgende predicties voor de $\frac{d\sigma}{dt'}$ verdelingen voor de beide reacties met deze factoren vermenigvuldigd alvorens ze met de experimentele gegevens te vergelijken (cf. par. V.e).

Evenzo moet men de uit de experimentele gegevens afgeleide koppelingsconstanten G^2 (tabel V.5) behorende bij het Abrams en Maor Regge pool model corrigeren. De gecorrigeerde koppelingsconstanten G_{corr}^2 verkrijgt men uit G^2 door te delen door de factoren 0,66 en 0,82 voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ resp. $\Delta^{++}\omega^0$.

Referenties.

- 1). J.D. Jackson and H. Pilkuhn, Nuovo Cimento 33 (1964), 906.
- 2). J.D. Jackson, Rev. Mod. Phys. 37 (1965), 484.
- 3). H. Pilkuhn, The Interactions of Hadrons, North Holland Publ. Cy., Amsterdam.
- 4). P.D.B. Collins and E.J. Squires, Regge poles in Particle Physics, Springer Verlag, Berlin (1968).
- 5). V.D. Barger and D.B. Cline, Phenomenological Theories of High Energy Scattering, W.A. Benjamin, New York (1969).
- 6). G.E. Hite, Rev. Mod. Phys. 41 (1969), 669.
- 7). U. Amaldi and F. Selleri, Nuovo Cimento 31 (1964), 906.
- 8). N.J. Sopkovich, Nuovo Cimento 26 (1962), 186.
- 9). K. Gottfried and J.D. Jackson, Nuovo Cimento 34 (1964), 735.
- 10). J.D. Jackson, J.T. Donohue, K. Gottfried, R. Keyser and B.E.Y. Svensson, Phys. Rev. 139 (1965), B 428.
- 11). A. Dar, T.L. Watts and V.F. Weisskopf, Nucl. Phys, B13 (1969), 477.
- 12). B.E.Y. Svensson, Proceedings of the 1967 CERN school of Physics, CERN 67-24 (1967).
- 13). R.D. Woods and D.S. Saxon, Phys. Rev. 95 (1954), 577.
- 14). V. Barger and M. Ebel, Phys. Rev. 138 (1965), B1148.
- 15). R. Keyser, CERN |DD|CO|66|3,
- 16). L. Stodolsky and J.J. Sakurai, Phys. Rev. Letters, 11 (1963), 90.
- 17). B.E.Y. Svensson, Nuovo Cimento 37 (1965), 714.
- 18). M. Aderholz, CERN |DD| 69-29 (1969).
- 19). T. Regge, Nuovo Cimento 14 (1959), 951.
- 20). L. Bertocchi, Proceedings of the Heidelberg International Conference on Elementary Particles (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967).
- 21). K. Gottfried and J.D. Jackson, Nuovo Cimento 33 (1964), 309.
- 22). J.P. Ader, M. Capdeville, G. Cohen-Tannoudji and Ph. Salin, Nuovo Cimento 56 A (1968), 952.

- 23). M. Krammer and U. Maor, Nuovo Cimento 52 A (1967), 308.
- 24). H. Högaasen and H.J. Lubatti, Phys. Letters 26 B (1968), 166.
- 25). J.J.J. Kokkedee, Lett. al. Nuovo Cimento, 3 (1970), 129.
- 26). M.J. Holwerda, J.J.J. Kokkedee, Paper submitted to Amsterdam
Conference 1971 (paper 58, preliminary version).
- 27). G.S. Abrams and U. Maor, Phys. Rev. Letters 25 (1970), 621.
- 28). G.S. Abrams, K.W.J. Barnham, W.R. Butter, D.G. Coyne, G. Gold-
haber, B.H. Halland, J. MacNaughton, Phys. Rev. Letters 25
(1970), 617.
- 29). I.J. Bloodworth, W.C. Jackson, J.D. Prentice, T.S. Yoon, Nucl.
Phys. B35 (1971), 79.
- 30). F. Arbab and R.C. Brown, Phys. Rev. 175 (1968), 1991.
- 31). D.F. Grether and G. Gidal, Phys. Rev. Letters 26 (1971), 792.

VI. Vergelijking met de voorspellingen van het quark-model.

In dit hoofdstuk wordt nagegaan in hoeverre de resultaten van Hfdst. IV m.b.t. de spintoestand van de uitgaande deeltjes in overeenstemming zijn met de quark-model voorspellingen van Bialas en Zalewski. In dit model worden relaties vastgesteld tussen de verschillende spin-amplituden binnen eenzelfde reactie.

Het is om twee redenen zinvol na te gaan of aan deze relaties wordt voldaan. De hoofdreden is uiteraard dat men hieruit aanwijzingen kan verkrijgen omtrent de geldigheid van het quark-model zelf. Daarnaast echter kunnen de relaties, als er aan voldaan wordt, nuttig zijn om in andere modellen - b.v. Regge pool modellen⁽¹⁾ - het aantal vrije parameters te beperken.

VI.a. Ontwikkeling van het quark-model.

Na het aanvankelijk succes van het quark model bij het afleiden van verhoudingen van werkzame doorsneden voor verschillende elastische processen^{(2),(3)}, is het model door o.a. Itzykson en Jacob⁽⁴⁾ toegepast op andere twee- en quasi twee deeltjes reacties. De moeilijkheid bij dit soort voorspellingen is dat verschillende processen andere kinematische grootheden, vormfactoren e.d. hebben, zodat vergelijking niet altijd mogelijk is. Friar en Frefil⁽⁵⁾ hebben daarom het model benut om de verschillende spin dichtheidsmatrix elementen binnen éénzelfde reactie uit te drukken in quark-quark verstrooiingsamplituden. Het voordeel is dat nu niet amplituden van verschillende processen met elkaar vergeleken worden, maar verschillende spintoestanden binnen eenzelfde proces, zodat vormfactoren e.d. een veel kleinere rol zullen spelen. Vervolgens hebben Bialas en Zalewski⁽⁶⁾ een nauwkeurige analyse verricht van de veronderstellingen welke Friar en Frefil omtrent de quark-quark verstrooiingsamplituden gemaakt hadden. Zij toonden aan dat er in feite een systeem van relaties bestaat voor de spin dichtheidsmatrix elementen van een reactie. Hierbij

onderscheidden zij naar opklimmende graad van ongewisheid drie klassen van relaties. We komen op deze klassen uitvoerig terug in par. VI.e.

VI.b. Definitie van het quark-model.

De veronderstellingen van het quark-model zijn:

- 1) De hadronen zijn opgebouwd uit quarks: baryonen uit 3 quarks (qqq) en mesonen uit quark en antiquark ($q\bar{q}$).
- 2) Elke verstrooiingsamplitudo van een twee deeltjes reactie is een coherente som van quark-quark verstrooiingsamplituden.
- 3) Tijdens de interactie zijn de quarks waaruit de twee deeltjes zijn opgebouwd als vrij te beschouwen en neemt van elk deeltje slechts één quark aan de interactie deel, terwijl van de andere quarks de toestand, inclusief de spintoestand^{(7),(8)}, niet verandert.
- 4) Na de interactie worden de "toeschouwende" quarks door de verstrooide quarks meegenomen en vormen tesamen de verstrooide deeltjes.

De quantumgetallen van de quarks, waaruit de deeltjes opgebouwd gedacht worden, zijn gegeven in tabel VI.1. De quarks hebben sommige quantum getallen (I, I_3 en S) gemeen met het proton, het neutron en de Λ^0 . Vandaar duidt men de drie quarks ook wel aan met p , n en λ . Indien verwarring tussen proton en neutron enerzijds en de p - en n -quarks anderzijds kan optreden, duiden we de eersten aan met de hoofdletters P en N .

Tabel VI.1. Quantum getallen van de quarks.

quark	B	I	I_3	S	Q	J^P
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}^+$
n	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$
λ	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$

Uit de quark samenstelling van de deeltjes $\pi^+ [p\bar{n}]$, $P[ppn]$, $\rho^0 [\frac{1}{\sqrt{2}} (p\bar{p} - n\bar{n})]$, $\omega^0 [\frac{1}{\sqrt{2}} (p\bar{p} + n\bar{n})]$ en $\Delta^{++} [ppp]$ en spintoe-stand van deeltjes en de quarks kan men het zg. "spin-unitaire spin" gedeelte van golffuncties der deeltjes afleiden^{(4),(9)}. Bij deze afleiding eist men dat het "spin-unitaire spin" gedeelte van de proton golffunctie symmetrisch is, zoals dit voor de Δ^{++} golffunctie ook het geval is.

De complete spin-unitaire spin golffuncties zijn gegeven in Appendix 4.

VI.c. Relatie tussen deeltjes- en quark-verstrooiingsamplituden.

Op basis van het in de vorige paragraaf beschreven sim-
plistische quark-model leidt men de betrekkingen tussen de deeltjes-
en quark-verstrooiingsamplituden af. Vergelijkt men de π^+ , proton
(P), V^0 ($= \rho^0$ of ω^0) en Δ^{++} quark golffuncties (App.4), dan volgt
hieruit dat in het quark-model de reactie

$$\pi^+ P \rightarrow V^0 \Delta^{++} \quad (A)$$

tot stand komt door de quark-quark verstrooiingsamplituden:

$$\langle \bar{p}_V, p_\Delta | \bar{n}_\pi, n_P \rangle + \alpha \langle n_V, p_\Delta | p_\pi, n_P \rangle$$

De aanduiding V staat voor het vector meson ρ^0 ($\alpha=-1$) of ω^0 ($\alpha=+1$), \bar{p} en \bar{n} zijn de antiquarks van p en n.

Daar wij alleen geïnteresseerd zijn in het verband tussen de spintoestanden van zowel de deeltjes als de quark-quark verstrooi-
ingsamplituden, en binnen eenzelfde reactie de quark samenstelling
van de amplituden dezelfde blijft, zullen we verder in alle ampli-
tuden alleen de spin-label expliciet aangeven. Zo betekent bv.:

$$\langle ++ | -- \rangle = \langle \bar{p}_V^+, p_\Delta^+ | \bar{n}_\pi^-, n_P^- \rangle + \alpha \langle n_V^+, p_\Delta^+ | p_\pi^-, n_P^- \rangle$$

waarbij de + en - aangeven dat de quark-spin projectie op de quan-
tatisatie-as $+\frac{1}{2}$ of $-\frac{1}{2}$ is.

De verstrooiingsamplituden van de reactie (A), uitgedrukt in quark-quark verstrooiingsamplituden zijn:

$$\langle m, n | 0, 1 \rangle = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \gamma, \delta}} A_{\alpha\gamma}^m B_{\beta\delta}^{1,n} \langle \gamma\delta | \alpha, \beta \rangle \quad (\text{VI.1})$$

waarbij zijn $l = 2 \times$ de proton spin projectie,

$m =$ de vector meson spin projectie,

$n = 2 \times$ de Δ^{++} spin projectie,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta = +$ of $-$, de quark spin projecties

telkens op de quantisatie-as.

De coëfficiënten A en B zijn de projecties op de V^0 resp. Δ^{++} quark-golffuncties van de, door de quark-quark interactie, verstoorde π^+ resp. P golffuncties. De waarden van deze coëfficiënten voor de verschillende spintoestanden van de in- en uitgaande deeltjes zijn gegeven in tabel VI.2.

Tabel VI.2. Waarden van de coëfficiënten voorkomende in form. VI.1.

m	$\pi^+ \rightarrow V^0$	$P \rightarrow \Delta^{++}$		
		$n \quad l$	$l = +1$	$l = -1$
1	$A_{-+}^1 = +\frac{1}{2}$	3	$B_{-+}^{1,3} = \sqrt{2}$	--
0	$A_{++}^0 = -A_{--}^0 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$	1	$B_{++}^{1,1} = -B_{--}^{1,1} = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$B_{-+}^{-1,1} = +\frac{1}{3}\sqrt{6}$
-1	$A_{+-}^{-1} = -\frac{1}{2}$	-1	$B_{+-}^{1,-1} = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$B_{++}^{-1,-1} = -B_{--}^{-1,-1} = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$
		-3	--	$B_{-+}^{-1,-3} = -\sqrt{2}$

Met de formule (VI.1) heeft men de 24 amplituden $\langle m, n | 0, 1 \rangle$ van de reactie (A) uitgedrukt in 16 quark-quark amplituden. Houdt men rekening met pariteitsbehoud, waardoor het aantal amplituden met een factor 2 wordt gereduceerd, dan betekent dit dat 12 verschillende amplituden van reactie (A) door 8 quark amplituden zijn bepaald. In werkelijkheid ligt de verhouding gunstiger omdat sommige quark amplituden steeds in dezelfde combinatie voorkomen, waardoor de 12 amplituden met 5 complexe getallen kunnen worden beschreven. De veronderstelling dat pariteitsbehoud

geldt voor de quark-quark verstrooiingsamplituden is geen extra veronderstelling binnen het quark-model, maar is noodzakelijk om te verzekeren dat de reactie amplituden van de deeltjes reactie (A) kunnen voldoen aan de eisen die uit pariteitsbehoud voortvloeien. Anders is het gesteld met de eis van tijdsomkeer invariantie m.b.t. quark-quark verstrooiingsamplituden. Door deze stap zou men het aantal onafhankelijke quark amplituden kunnen verminderen tot drie. Dit is echter een extra veronderstelling die alleen geldt voor vrije quarks en bovendien niet eenduidig is te definiëren zonder aan een bepaald assenstelsel te refereren^{(10),(11)}.

VI.d. Spin referentie systemen voor de quark-quark verstrooiing.

VI.d.1 Friar en Frefil⁽⁵⁾ kiezen als spin referentie systeem voor de quark-quark verstrooiingsamplituden het helicitetsstelsel (y-as = normaal op het productievlak, z-as = de vliegrichting van de verstrooide quarks). Door pariteitsbehoud en tijdsomkeer invariantie toe te passen vindt men eenvoudige betrekkingen tussen de 16 quark amplituden (Tabel VI.3).

Tabel VI.3. De quark-quark verstrooiingsamplituden in het helicitetssysteem. Verondersteld is dat de amplituden tijdsomkeer-invariant zijn.

begin eind	++	+-	-+	--
++	A1	A5	A6	A2
+-	-A5	A3	A4	A6
-+	-A6	A4	A3	A5
--	A2	-A6	-A5	A1

Voorzover deze relaties op pariteitsbehoud berusten gelden ze in elk assenstelsel waarbij de spin quantisatie in het productievlak ligt, maar die welke uit tijdsomkeer invariantie volgen zijn af-

hankelijk van de richting van de z-as: de eenvoudige gedaante van de betrekkingen $\langle + - | ++ \rangle = - \langle ++ | + - \rangle$ en $\langle - + | ++ \rangle = - \langle ++ | - + \rangle$ geldt alleen in het quark helicityssysteem. Daarom gelden de door Friar en Frefil afgeleide relaties voor de dichtheidsmatrices slechts als de z-as van de spin referentie systemen van de deeltjes geproduceerd in reactie (A) samenvalt met de z-as van de (onbekende) helicityssensoren van de quarks.

Bij verstrooiing in de voorwaartse richting, waartoe de auteurs zich beperkten, zal dit het geval zijn. Het gevolg van deze beperking is echter dat aan de meeste relaties die worden afgeleid, met name dat $\text{Rep}_{10, \rho}^{1-1}$, Rep_{31} , Rep_{3-1} gelijk nul moeten zijn, reeds op kinematische gronden is voldaan (Hfdst.IV, par. b.5) en deze geen geschikte test meer zijn voor het quark-model.

VI.d.2. Door onderscheid te maken tussen quark-model voorspellingen die niet-, weinig- of sterk-afhankelijk zijn van het gekozen spin referentie systeem slaagden Bialas en Zalewski er in een bruikbare test voor het quark-model af te leiden

In principe moet men met drie spin referentie systemen rekening houden:

- 1) Het assenstelsel waarin de spintoestand van de quarks die niet aan de interactie deelnemen, vóór en ná de reactie gelijk is.
- 2) Het helicityssysteem waarin men de quark-quark verstrooiing beschrijft.
- 3) Het spin referentie systeem van de uitgaande deeltjes.

Van deze drie assenstelsels is slechts het laatste bekend, maar het ligt voor de hand te veronderstellen dat alle drie assenstelsels één as gemeen hebben n.l. de normaal op het productievlak. Kiest men deze gemeenschappelijke as als z-as (d.w.z. een transversaal assenstelsel), dan veranderen de amplituden - op een fase factor na - niet als men van het ene stelsel naar het andere overgaat.

In elk transversaal stelsel zijn 8 van 16 quark amplituden gelijk nul op grond van pariteitsbehoud^{(12), (13)}. Omdat deze bewering

onafhankelijk is van de fasen van de amplituden zullen de conclusies die hieruit volgen in elk transversaal stelsel gelden (klasse A relaties).

Alle deeltjes verstrooiingsamplituden (en dus alle spin dichtheidsmatrices) kunnen in de resterende 8 quark-quark verstrooiingsamplituden, weergegeven in tabel VI.4, worden uitgedrukt.

Tabel VI.4. De quark-quark verstrooiingsamplituden in een transversaal systeem.

begin eind	++	+-	-+	--
++	f1	0	0	f7
+-	0	f3	f6	0
-+	0	f5	f4	0
--	f8	0	0	f2

Gebruikt men i.p.v. de spin dichtheidsmatrix statistische tensoren om de spintoestand van de deeltjes weer te geven, dan verkrijgt men met behulp van de formules van de Appendices 4 en 5 de relaties gegeven in tabel VI.5. Hierbij is $|f|^2 = \sum_{i=5}^8 |f_i|^2$ en $f_0 = f_1 + f_2 - f_3 - f_4$.

Bovendien is gebruik gemaakt van de spoor conditie:

$$2\sqrt{3} T_{00}^{00} = \rho^{11} + \rho^{-1-1} + \rho^{00} = \frac{2}{3} (|f|^2 + \frac{1}{4} |f_0|^2) = 1.$$

Eist men tijdsomkeer invariantie m.b.t. de quark-quark verstrooiingsamplituden dan kan men afleiden dat in bepaalde transversale systemen, waartoe het transversaal helicitateits- en transversaal Jackson systeem behoren, voor vrije quarks de betrekkingen $f_5 = f_6$ en $f_7 = f_8$ gelden (6),(10),(13). De conclusies die men hieruit kan trekken (de klasse B resp. klasse C relaties) hebben slechts een beperkte geldigheid. Afgezien van de vraag of quarks waaruit de deeltjes zijn opgebouwd wel als vrij mogen worden beschouwd, zullen de betreffende amplituden, omdat i.h.a. de bovengenoemde drie assenstelsel niet samen-

vallen, hoogstens op een fase factor na aan elkaar gelijk kunnen zijn^{(10),(11)}. Het gevolg is dat de relaties van klasse B en C niet in elk transversaal assenstelsel kunnen gelden. Om het quark-model te kunnen testen is het bijgevolg zinvol te zoeken naar assenstelsels waarin aan deze relaties wordt voldaan.

Tabel VI.5. De statistische tensoren uitgedrukt in de 5 onafhankelijke quark-quark verstrooiingsamplituden.

T_{00}^{02}	$\frac{1}{2\sqrt{3}} (f ^2 - 1)$
T_{00}^{20}	$\frac{1}{\sqrt{6}} (f ^2 - 1)$
T_{00}^{22}	$\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{6}} f ^2$
T_{22}^{22}	$\frac{1}{\sqrt{6}} f_8 f_7^*$
T_{2-2}^{22}	$\frac{1}{\sqrt{6}} f_5 f_6^*$
T_{20}^{22}	$-\frac{1}{6} (f_5 f_7^* + f_8 f_6^*)$
T_{02}^{22}	$-\frac{1}{6} (f_6 f_7^* + f_8 f_5^*)$
T_{11}^{22}	$\frac{1}{4\sqrt{6}} (f_0 f_7^* + f_8 f_0^*)$
T_{1-1}^{22}	$-\frac{1}{4\sqrt{6}} (f_0 f_6^* + f_5 f_0^*)$
T_{02}^{02}	$-\frac{1}{3\sqrt{2}} (f_6 f_7^* + f_8 f_5^*)$
T_{20}^{20}	$-\frac{1}{3} (f_5 f_7^* + f_8 f_6^*)$

VI.e. Relaties tussen de statistische tensoren.

Klasse A-relaties. Uit tabel VI.5 kan men de volgende relaties tussen de statistische tensoren afleiden:

$$T_{00}^{20} = \sqrt{2} T_{00}^{02} \quad (\text{A.1})$$

$$T_{20}^{22} = \frac{1}{2} T_{20}^{20} \quad (\text{A.2 en A.3})$$

$$T_{02}^{22} = \frac{1}{2}\sqrt{2} T_{02}^{02} \quad (\text{A.4 en A.5})$$

$$T_{00}^{22} = \frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{2}\sqrt{2} T_{00}^{02} \quad (\text{A.6})$$

In elk transversaal assenstelsel moeten deze relaties gelden. Immers bij een rotatie over de z-as over een hoek ψ_1 voor het Δ^{++} assenstelsel en een hoek ψ_2 voor het V^0 assenstelsel transformeren de statistische tensoren als volgt (zie Hfdst. III):

$$(T_{MN}^{J_1 J_2})' = e^{-i(M\psi_2 + N\psi_1)} T_{MN}^{J_1 J_2} \quad (\text{VI.2})$$

zodat de fase van de linker- en rechter leden van de complexe relaties (A.2 t/m A.4) op gelijke wijze verandert en de reële relaties (A.1 en A.6) in het geheel niet veranderen.

Met deze relaties heeft men een test op de essentie van het quark model. Kotanski en Zalewski⁽¹⁴⁾ hebben evenwel aangetoond dat men deze relaties ook kan afleiden als men veronderstelt dat er geen overgang mogelijk is waarbij de spin flip tussen inkomend en uitgaand baryon resp. meson groter dan één is. Binnen het quark-model is deze veronderstelling een consequentie van de aanname dat in ieder deeltje slechts één quark aan de interactie deelneemt.

Klasse B-relaties. Deze relaties volgen uit tabel VI.5 indien men de extra veronderstelling invoert dat $f_5 = f_6$ is. De relaties

$$\text{zijn: } T_{20}^{22} = T_{02}^{22} \quad (\text{B.1 en B.2})$$

$$T_{20}^{20} = \sqrt{2} T_{02}^{02} \quad (\text{B.3 en B.4})$$

$$\text{Im } T_{2-2}^{22} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Im } T_{1-1}^{22} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Deze relaties zijn slechts in zoverre invariant voor rotaties om de z-as van de spin referentie systemen als men het baryon- en meson-assenstelsel over een zelfde hoek roteert: $\psi_1 = \psi_2$ in

formule VI.2. Slechts vier van deze relaties zijn onafhankelijk, daar de relaties B.3 en B.4 volgen uit B.1, B.2 en de relaties A.2 t/m A.5.

Klasse C-relaties. Neemt men aan dat behalve $f_5 = f_6$ ook geldt $f_7 = f_8$, dan kan men nog zeven relaties afleiden uit tabel

$$\text{VI.5:} \quad \text{Im } T_{22}^{22} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Im } T_{20}^{22} = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\text{Im } T_{02}^{22} = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\text{Im } T_{11}^{22} = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\text{Im } T_{02}^{02} = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\text{Im } T_{20}^{20} = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\text{Re}(T_{22}^{22} + T_{2-2}^{22}) + T_{00}^{22} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \quad (\text{C.7})$$

Uit de transformatie eigenschappen van de statistische tensoren bij een rotatie om de z-as volgt dat er, afgezien van een rotatie over 90° om de z-as, maar één spin referentie systeem voor elk der uitgaande deeltjes kan zijn waarin aan deze relaties wordt voldaan. Om deze relaties te kunnen testen moeten de statistische tensoren zoals ze berekend zijn in bv. het Transversaal Jackson of -Heliciteitssysteem getransformeerd worden naar dit assenstelsel.

Van de zeven relaties zijn er slechts vier onafhankelijk daar uit de klasse A en B relaties reeds volgt dat :

$$T_{20}^{22} = \frac{1}{2} T_{20}^{20} = T_{02}^{22} = \frac{1}{2} \sqrt{2} T_{02}^{02}.$$

Heeft men verondersteld dat $f_5 = f_6$ en $f_7 = f_8$, dan worden de 19 statistische tensoren bepaald door drie complexe amplituden f_0 , f_5 en f_7 . De drie amplituden moeten voldoen aan een normeringsvoorwaarde (zie opmerking bij tabel VI.5) en bovendien is de gemeenschappelijke fase factor van de drie amplituden niet van belang. De 19 statistische tensoren worden dus bepaald door vier parameters. Men verwacht daarom dat er 15 onafhankelijke relaties zijn. De klasse A, B en C rela-

ties vormen tesamen 14 onafhankelijke relaties. De 15e relatie is een niet lineaire betrekking tussen T_{11}^{22} , T_{1-1}^{22} en T_{02}^{02} . Deze volgt uit het feit dat de som van de onderlinge fases der drie amplituden 360° is.

VI.f. Onderzoek naar de geldigheid van het quark-model.

Voor de reacties $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ resp. $\Delta^{++} \omega^0$ zijn de quark-model voorspellingen onderzocht door afzonderlijk na te gaan of aan de relaties van klasse A, B en C is voldaan (par. VI.f.2) en of het mogelijk is de statistische tensoren uit te drukken in de vijf quark-quark verstrooiingsamplituden zoals aangegeven in tabel VI.5 (par.VI.f.3).

VI.f.1. Keuze van de assenstelsels.

De relaties van klasse A, B en C zijn getest in drie assenstelsels: het Transversaal-Jackson-(T.J.), Transversaal-Heliciteits-(T.H.) en Transversaal-Donohue-Högaasen-(T.D.H.) systeem. De genoemde relaties zijn lineair. Hieruit volgt dat ze voor de gemiddelde waarden van de statistische tensoren moeten gelden ongeacht de wijze waarop de quark-quark verstrooiingsamplituden van de impulsoverdracht t afhankelijk zijn. Omdat de klasse A relaties en de klasse B relaties, voorzover het een gemeenschappelijke rotatie van het Δ^{++} en V^0 assenstelsel betreft, onafhankelijk zijn van de keuze van het assenstelsel, mag men verwachten dat deze relaties zowel in het T.J.- als in het T.H.-systeem kunnen gelden. De klasse C relaties (en dus ook de veronderstelling dat $f_7 = f_8$ is) zijn evenwel sterk afhankelijk van de keuze van het assenstelsel. Om deze relaties te kunnen testen voor gemiddelde waarden van de statistische tensoren moet men het assenstelsel zodanig kiezen dat voor elke waarde van t de fases van f_7 en f_8 gelijk zijn. Om die reden kunnen de klasse C relaties slechts in één assenstelsel gelden. Een voor de hand liggende keuze voor dit assenstelsel is het T.D.H. systeem. Deze relaties eisen nl. dat alle statistische tensoren reëel zijn. Statistisch de meest significante zijn veelal de tensoren T_{02}^{02} en T_{20}^{20} en deze zijn alleen in het T.D.H.-systeem reëel. Uit de rotatie eigenschappen van de statistische tensoren (form.VI.2) blijkt immers dat T_{20}^{20} reëel wordt in het assenstel-

sel dat men verkrijgt door het T.J.-systeem over een hoek θ om de r-as roteren, waarbij voor θ geldt:

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \left(\frac{\operatorname{Im} T_{20}^{20}}{\operatorname{Re} T_{20}^{20}} \right)_{\text{T.J.}} \quad \text{VI.3}$$

Met de formules gegeven in de Appendices A5 en A6 kan men de statistische tensoren in het T.J.-systeem uitdrukken in spin dichtheidsmatrix elementen t.o.v. het Jackson systeem. Door deze omzetting gaat de formule (VI.3) over in

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \left(\frac{-2\sqrt{2} \operatorname{Re}(\rho^{10})}{\rho_{00}^{00} - \rho_{-1-1}^{11} + \rho_{+1-1}^{11}} \right)_J \quad \text{VI.4}$$

Uit de form.(VI.4) volgt dat θ gelijk is aan de hoek $\theta_{\text{DH}} - V$ voor het vector meson, zoals die in par. III.d is gedefinieerd. Evenzo wordt de tensor T_{02}^{02} reëel als het Δ^{++} -assenstelsel over de hoek $\theta_{\text{DH}} - \Delta^{++}$ wordt geroteerd vanuit het T.J.-systeem.

De transformatie van het T.J. naar het T.D.H. systeem is uitgevoerd door van alle verschijnselen in een bepaald t' -deel-interval de azimuthhoek φ van de vervalsrichtingsvector van de Δ^{++} en de V^0 te verminderen met de hoek θ_{DH} . Zoals uit fig.IV.6 en IV.14 blijkt vertonen de hoeken θ_{DH} voor de Δ^{++} en V^0 eenzelfde gedrag als functie van t' . Door de grote statistische fouten kunnen de beide hoeken in een bepaald interval echter aanzienlijk verschillen. Zou men het Δ^{++} en V^0 assenstelsel elk afzonderlijk over hun eigen hoek θ_{DH} roteren vanuit het T.J. systeem dan ontstaat de mogelijkheid dat de klasse B relaties - waaraan in het T.J. systeem goed is voldaan (cf. par.VI.e.2) - in het T.D.H.-systeem worden verstoord. Om dit te vermijden zijn het Δ^{++} en V^0 assenstelsel over eenzelfde hoek geroteerd, nl. het gemiddelde van $\theta_{\text{DH}} - V$ en $\theta_{\text{DH}} - \Delta^{++}$ in dat interval.

VI.f.2. Geldigheid van de klasse A, B en C relaties.

De gemiddelde waarden van de statistische tensoren zijn in de drie hiervoor genoemde assenstelsels berekend voor alle verschijnselen gelegen in de t' -intervallen

$$0 \leq t' \leq 0,2 \text{ GeV}^2 \text{ voor } \Delta^{++} \rho^0$$

$$0 \leq t' \leq 0,55 \text{ GeV}^2 \text{ voor } \Delta^{++} \omega^0.$$

In tabel VI.6 en VI.7 zijn de linker- en rechterleden van de klasse A en B relaties en het verschil tussen deze beide gegeven.

Tabel VI.6. Vergelijking van de gemiddelde waarden van de linkerleden (L.L.) en rechterleden (R.L.) van de klasse A relaties voor de reacties $\Delta^{++} \rho^0$ en $\Delta^{++} \omega^0$.

Assen- stelsel	KLASSE A - RELATIES					
	$\Delta^{++} \rho^0$			$\Delta^{++} \omega^0$		
	L.L.	R.L.	verschil	L.L.	R.L.	verschil
T.J.	.155±.012	.145±.027	.010±.029	-.043±.022	.011±.044	-.054±.046
	-.089±.023	-.077±.005	-.012±.023	.012±.032	-.020±.007	.032±.032
	.009±.024	-.029±.006	.038±.024	-.055±.032	-.035±.007	-.020±.032
	-.068±.021	-.066±.011	-.002±.019	.037±.034	-.022±.015	-.059±.037
	-.027±.022	-.028±.011	.001±.020	-.024±.035	-.029±.016	.005±.039
	.107±.027	.132±.014	-.025±.035	.171±.050	.199±.022	-.028±.051
T.H.	.155±.012	.145±.027	.010±.029	-.043±.022	.011±.044	-.054±.046
	-.026±.025	-.063±.006	.037±.024	-.048±.031	-.016±.007	-.032±.031
	.059±.023	.052±.006	.007±.023	.003±.033	.029±.007	-.026±.033
	-.043±.021	-.042±.011	-.001±.020	-.048±.033	.006±.015	-.054±.036
	.052±.021	.059±.011	-.007±.019	-.015±.036	.028±.016	-.043±.040
	.107±.027	.132±.014	-.025±.035	.171±.050	.199±.022	-.028±.051
T.D.H.	.155±.012	.145±.027	.010±.029	-.043±.022	.011±.044	-.054±.046
	-.069±.024	-.082±.005	.013±.024	-.022±.031	-.042±.007	.020±.031
	.028±.024	-.005±.006	.033±.023	-.042±.033	-.005±.008	-.037±.032
	-.074±.021	-.078±.011	.004±.020	-.008±.035	-.043±.015	.035±.039
	-.004±.021	-.000±.011	-.004±.019	-.050±.034	-.004±.015	-.046±.037
	.107±.027	.132±.014	-.025±.035	.171±.050	.199±.022	-.028±.051

Tabel VI.7. Vergelijking van de linker- en rechterleden van de klasse B relaties voor de reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$.

Assen- stelsel	KLASSE B-RELATIES					
	$\Delta^{++}\rho^0$			$\Delta^{++}\omega^0$		
	L.L.	R.L.	verschil	L.L.	R.L.	verschil
T.J.	$-.089 \pm .023$	$-.068 \pm .021$	$-.021 \pm .030$	$.012 \pm .032$	$.037 \pm .034$	$-.025 \pm .047$
	$.009 \pm .024$	$-.027 \pm .022$	$.034 \pm .033$	$-.055 \pm .032$	$-.024 \pm .035$	$-.031 \pm .048$
	$-.155 \pm .010$	$-.131 \pm .021$	$-.024 \pm .023$	$-.040 \pm .015$	$-.043 \pm .030$	$.003 \pm .032$
	$-.059 \pm .012$	$-.055 \pm .021$	$-.004 \pm .026$	$-.070 \pm .014$	$-.059 \pm .031$	$-.011 \pm .035$
	$.002 \pm .027$	0.0	$.002 \pm .027$	$-.013 \pm .035$	0.0	$-.013 \pm .035$
	$.022 \pm .022$	0.0	$.022 \pm .022$	$-.038 \pm .035$	0.0	$-.038 \pm .035$
T.H.	$-.026 \pm .025$	$-.043 \pm .021$	$.017 \pm .033$	$-.047 \pm .031$	$-.048 \pm .033$	$.001 \pm .045$
	$.059 \pm .023$	$.052 \pm .021$	$.007 \pm .031$	$.003 \pm .033$	$-.015 \pm .036$	$.018 \pm .049$
	$-.126 \pm .011$	$-.084 \pm .021$	$-.042 \pm .025$	$-.031 \pm .015$	$.011 \pm .030$	$-.042 \pm .033$
	$.103 \pm .010$	$.119 \pm .021$	$-.016 \pm .024$	$.057 \pm .015$	$.049 \pm .031$	$.008 \pm .034$
	$.008 \pm .027$	0.0	$.008 \pm .027$	$-.008 \pm .035$	0.0	$-.008 \pm .035$
	$.020 \pm .022$	0.0	$.020 \pm .022$	$-.029 \pm .034$	0.0	$-.029 \pm .034$
T.D.H.	$-.069 \pm .024$	$-.075 \pm .021$	$.006 \pm .030$	$-.022 \pm .031$	$-.008 \pm .035$	$-.014 \pm .047$
	$.028 \pm .024$	$-.004 \pm .021$	$.032 \pm .033$	$-.042 \pm .031$	$-.050 \pm .034$	$.008 \pm .047$
	$-.165 \pm .010$	$-.157 \pm .021$	$-.008 \pm .022$	$-.083 \pm .014$	$-.086 \pm .031$	$.003 \pm .033$
	$-.010 \pm .011$	$-.001 \pm .021$	$-.009 \pm .026$	$-.010 \pm .015$	$-.009 \pm .031$	$-.001 \pm .034$
	$.002 \pm .027$	0.0	$.002 \pm .027$	$-.013 \pm .033$	0.0	$-.013 \pm .035$
	$.022 \pm .022$	0.0	$.022 \pm .022$	$-.038 \pm .035$	0.0	$-.038 \pm .035$

In tabel VI.8 zijn de waarden gegeven welke de linkerleden van de klasse C relaties in de diverse assenstelsels aannemen. Deze moeten, als aan de klasse C relaties wordt voldaan, gelijk nul worden. Afwijkingen van meer dan twee standaarddeviaties zijn onderstreept.

Als eerste conclusie kan gesteld worden dat voor beide reacties in alle assenstelsels goed wordt voldaan aan de relaties van klasse A en B. Voor beide reacties wordt noch in het T.J.- noch in het T.H.-systeem aan de klasse C relaties voldaan. In het T.D.H.-systeem voldoen de statistische tensoren van de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ wel aan de klasse C relaties,

Tabel VI.8. De linkerleden van de klasse C relaties voor de reacties $\Delta^{++}_\rho{}^0$ en $\Delta^{++}_\omega{}^0$. (De rechterleden zijn alle gelijk nul.)

L.L. van Re- latie	KLASSE C-RELATIES					
	$\Delta^{++}_\rho{}^0$			$\Delta^{++}_\omega{}^0$		
	Assenstelsel			Assenstelsel		
	T.J.	T.H.	T.D.H.	T.J.	T.H.	T.D.H.
C1	<u>.087±.027</u>	<u>-.141±.027</u>	<u>-.019±.027</u>	<u>-.003±.035</u>	<u>.006±.035</u>	<u>-.001±.034</u>
C2	<u>.009±.024</u>	<u>.059±.023</u>	<u>.028±.024</u>	<u>-.055±.032</u>	<u>.003±.033</u>	<u>-.042±.033</u>
C3	<u>-.027±.022</u>	<u>.052±.021</u>	<u>-.004±.021</u>	<u>-.024±.035</u>	<u>-.016±.036</u>	<u>-.050±.034</u>
C4	<u>-.001±.020</u>	<u>-.091±.022</u>	<u>-.033±.020</u>	<u>-.088±.034</u>	<u>-.064±.035</u>	<u>-.154±.034</u>
C5	<u>-.039±.015</u>	<u>.084±.015</u>	<u>-.001±.015</u>	<u>-.042±.022</u>	<u>.039±.022</u>	<u>-.006±.022</u>
C6	<u>-.059±.012</u>	<u>.103±.010</u>	<u>-.010±.011</u>	<u>-.070±.014</u>	<u>.057±.015</u>	<u>-.010±.015</u>
C7	<u>-.131±.047</u>	<u>-.314±.048</u>	<u>-.082±.048</u>	<u>-.141±.070</u>	<u>-.229±.069</u>	<u>-.184±.069</u>

maar die van de reactie $\Delta^{++}_\omega{}^0$ nog steeds niet.

In het T.D.H.-systeem zijn de imaginaire delen van T_{02}^{02} en T_{20}^{20} per definitie gelijk nul, evenals van de tensoren T_{02}^{22} en T_{20}^{22} , die daarmee parallel lopen volgens de klasse A en B relaties. Beslissend voor de geldigheid van de klasse C relaties is derhalve alleen nog dat de imaginaire delen van T_{22}^{22} en T_{11}^{22} in het T.D.H.-systeem gelijk nul worden en dat aan relatie C7 wordt voldaan. Voor de reactie $\Delta^{++}_\omega{}^0$ blijkt in het complexe vlak de gemiddelde waarden van de tensor T_{11}^{22} echter loodrecht te staan op de tensoren T_{02}^{02} en T_{20}^{20} , zowel in het T.J.-, T.H.- als ook in het T.D.H.-systeem. Evenmin wordt aan de relatie C7 voldaan.

Ten aanzien van de $\Delta^{++}_\omega{}^0$ situatie zijn nu twee interpretaties mogelijk. Ofwel de klasse C relaties gelden inderdaad niet, hetgeen onbevredigend zou zijn, daar de klasse B relaties, die uit een gelijksoortige veronderstelling m.b.t. de amplituden f5 en f6 volgen, wel gelden. Ofwel zijn we er niet in geslaagd het assenstelsel te vinden waarin de fasen van f7 en f8 gelijk zijn. Zoals in par.VI.e. is aangetoond zijn deze fasen veel sterker afhankelijk van de keuze van het assenstelsel dan die van f5 en f6. Door nl. te stellen dat het T.D.H.-systeem (waarin de

imaginaire delen van T_{02}^{02} en T_{20}^{20} gelijk nul worden) het stelsel is waarin de fasen van f_7 en f_8 gelijk zijn, houdt men er geen rekening mee dat ook de imaginaire delen van T_{22}^{22} en T_{11}^{22} in dit stelsel moeten verdwijnen. Voor de reactie $\Delta^{++}_\omega^0$ is deze laatste tensor evenwel statistisch even significant als T_{02}^{02} en T_{20}^{20} .

Deze laatste interpretatie wordt in de volgende paragraaf nader onderzocht*.

VI.f.3. Bepaling van de quark-quark verstrooiingsamplituden.

Men kan de geldigheid quark-model ook onderzoeken⁽¹⁵⁾ door een kleinste kwadraten aanpassing van de statistische tensoren, zoals deze bv. in het T.J.-systeem zijn bepaald, aan de formules gegeven in tabel VI.5. De χ^2 -waarde van de aanpassing is dan een test op de geldigheid van het quark-model. Tevens vindt men op deze wijze de waarden van de complexe amplitude f_0 , f_5 , f_6 , f_7 en f_8 , die in deze aanpassing als vrije parameters optreden.

Zoals aan het einde van par. VI.e. is opgemerkt speelt een gemeenschappelijke fase factor van de amplituden geen rol. We hebben daarom de fase van f_7 gelijk nul gesteld. Tevens moeten de amplituden aan de normeringseis voldoen:

$$\frac{2}{3} (|f|^2 + \frac{1}{4}|f_0|^2) = 1.$$

Deze volgt uit de spoor conditie van de spin dichtheidsmatrix (zie opm. bij tabel VI.5). Het aantal vrije parameters bedraagt dus 8. Daar er 19 gemeten grootheden zijn (3 reële en 8 complexe statistische tensoren) leidt het quark-model op zich (d.w.z. zonder de veronderstellingen $f_5 = f_6$ en $f_7 = f_8$) tot 11 relaties tussen de statistische tensoren. Van deze relaties zijn er 6 lineair (de klasse A-relaties) en 5 niet lineair. Veronderstelt men bovendien dat $f_5 = f_6$ is dan verkrijgt men in totaal 13 relaties waarvan er nu 10 lineair zijn (de onafhankelijke klasse A en B relaties tesamen). Deze veronderstelling lijkt gerechtvaardigd omdat de statistische tensoren van beide reacties aan de klasse

* In publicatie (16) werd alleen de eerste interpretatie aangehouden.

B relaties voldoen in alle beschouwde assenstelsels. De veronderstelling $f_7 = f_8$ is niet gemaakt omdat in de vorige paragraaf is gebleken dat hieraan niet wordt voldaan in het T.J.-systeem. In plaats daarvan is de veronderstelling $|f_7| = |f_8|$ ingevoerd. Wanneer aan de laatste veronderstelling wordt voldaan betekent dit dat er steeds een assenstelsel te vinden is waarvoor geldt $f_7 = f_8^{(15)}$.

Omdat de amplituden functies zijn van de impulsoverdracht t en sommige betrekkingen niet lineair zijn is het i.h.a. niet gerechtvaardigd de gemiddelde waarden van de statistische tensoren te gebruiken om de amplituden te bepalen. Zijn echter de amplituden (en bijgevolg de statistische tensoren) niet sterk t -afhankelijk dan is het gebruik van gemiddelde waarden wel verantwoord. Daar het moeilijk is uit het verloop van de statistische tensoren als functie van t , bij voorbaat het gedrag van de amplituden te beoordelen, is de test voor verschillende deel-intervallen als ook voor de "grote" intervallen uitgevoerd. De grenzen van de zg. "grote" intervallen zijn gegeven in het begin van par.VI.f.2.

Voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ zal deze analyse geen nieuwe resultaten geven m.b.t. de geldigheid van het quark-model, omdat de gemiddelde waarden van de statistische tensoren aan de klasse A, B en C relaties voldoen. Aangezien de hoek waarover geroteerd is om van het T.J.-systeem naar het T.D.H.-systeem over te gaan niet groot is, zal het gebruik van de gemiddelde waarden van de statistische tensoren om de amplituden te bepalen geoorloofd zijn. Toch is ook voor deze reactie de analyse in deel intervallen uitgevoerd, in de eerste plaats om de $\Delta^{++}\rho^0$ -amplituden te bepalen maar ook om een vergelijking te hebben met de reactie $\Delta^{++}\omega^0$.

In de vorige paragraaf is gebleken dat we voor de laatste reactie geen assenstelsel konden vinden waarin de gemiddelde waarden van de statistische tensoren over het "grote" interval aan de klasse C-relaties voldeden. Met de hierboven beschreven analyse kunnen we nagaan of in de deel intervallen wel aan het quark-model met de voorwaarden $f_5 = f_6$ en $|f_7| = |f_8|$ wordt voldaan.

De experimentele waarden van de statistische tensoren in de diverse t' -deel-intervallen en de door de kleinste kwadraten aanpassing verkregen

waarden zijn in de fig. VI.1 en VI.2 voor de reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$ uitgezet. Bij elk experimenteel punt behoren drie berekende waarden: zonder extra voorwaarden (*), met de voorwaarde $f5 = f6$ (x) en met de voorwaarden $f5 = f6$ én $|f7| = |f8|$ (\diamond). De grenzen van de intervallen waarin de experimentele waarden zijn bepaald staan vermeld in tabel VI.9 en VI.10 voor resp. $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$. In deze tabellen zijn tevens

Tabel VI.9 en 10. De χ^2 (waarschijnlijkheid) van de aanpassing van de in diverse t' -intervallen bepaalde waarden van de statistische tensoren aan de form. van tabel VI.5. De aanpassing is herhaald met de extra veronderstellingen $f5 = f6$ resp. $f5 = f6$ én $|f7| = |f8|$. De resultaten voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ zijn gegeven in tabel VI.9 en voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$ in tabel VI.10.

Tabel VI.9.

χ^2 (waarschijnlijkheid in %)

		t'-	0,0-	0,012-	0,030-	0,057-	0,100-	0,200-	0,0-
		interval	0,012	0,030	0,057	0,100	0,200	0,400	0,200
		aantal	182	194	207	200	189	107	972
		versch.							
Extra- Ver- onderstell.	aant.vrij- heids- graden								
-	11		9,8(55)	15,6(15)	4,6(95)	12,0(35)	11,0(45)	18,2 (8)	5,0(92)
f5 = f6	13		17,0(20)	18,6(14)	11,6(55)	14,9(30)	15,8(25)	18,3(15)	6,1(93)
f5 = f6 én									
f7 = f8	14		17,2(25)	18,6(18)	15,8(35)	15,0(40)	16,2(30)	21,5(10)	13,4(50)

Tabel VI.10.

		χ^2 (waarschijnlijkheid in %)						
		t'- interval	0,0- 0,08	0,08- 0,16	0,16- 0,26	0,26- 0,45	0,45- 0,80	0,0- 0,55
		aantal versch.	97	92	105	110	77	442
Extra- Ver- onderstell.	aant.vrij- heids- graden							
-	11		10,4(50)	15,4(15)	8,5(65)	12,0(35)	6,7(80)	7,9(70)
f5 = f6	13		10,8(65)	19,6(10)	9,9(70)	13,3(45)	9,2(75)	9,3(75)
f5=f6 én f7 = f8	14		12,1(60)	20,7(10)	14,7(40)	16,1(25)	13,9(45)	47,9(0,0)

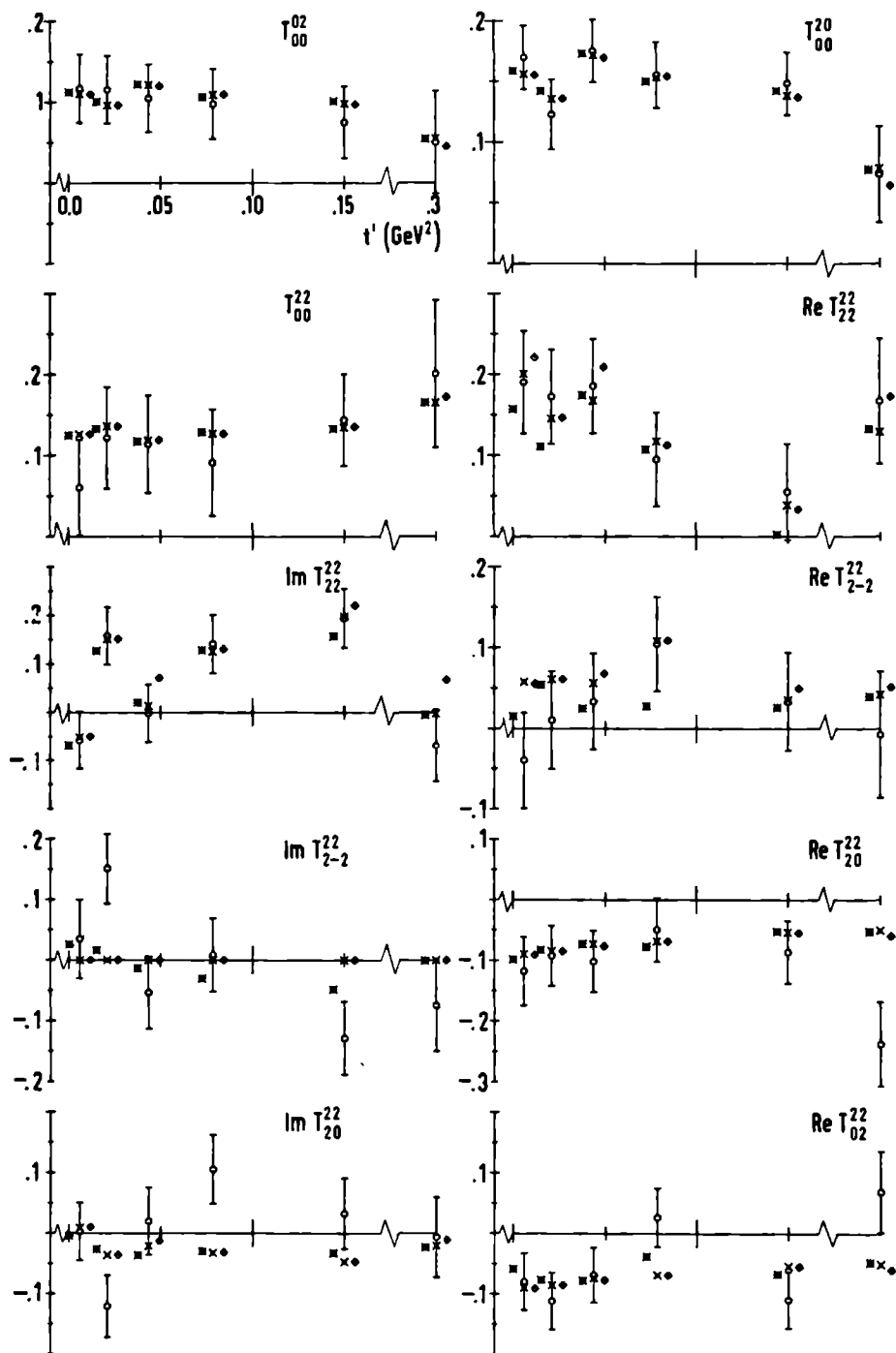


Fig.VI.1a. De experimentele waarden van de statistische tensoren voor de reactie $\Delta^{++} \rho^0$, bepaald in de verschillende t' -intervallen. Links (*), midden (x) en rechts (◊) hiervan, de in de tekst beschreven door aanpassing verkregen waarden.

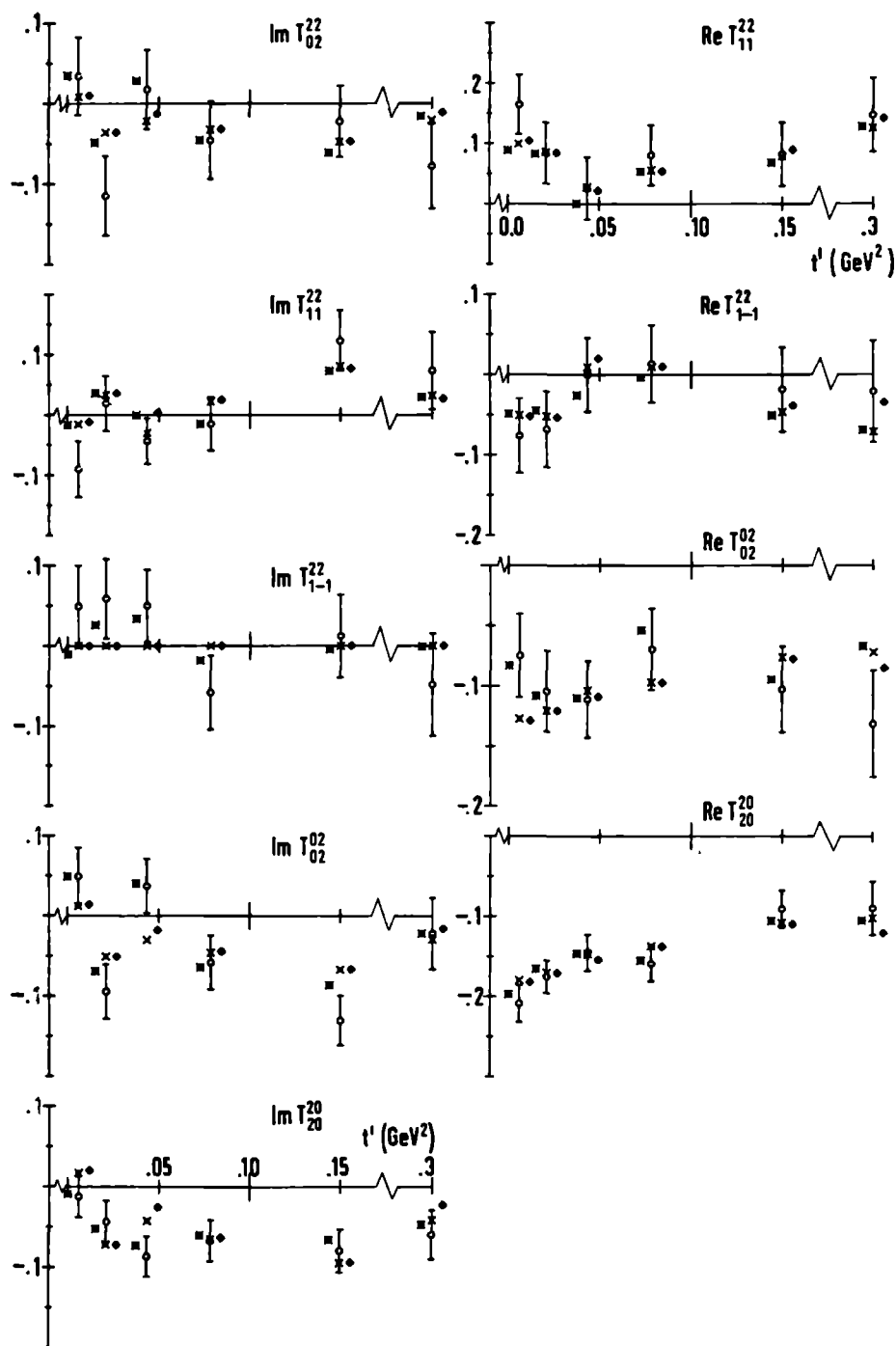


Fig.VI.1b. De experimentele waarden van de statistische tensoren voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$, bepaald in de verschillende t' -intervallen. Links (*), midden (x) en rechts (◊) hiervan, de in de tekst beschreven door aanpassing verkregen waarden.

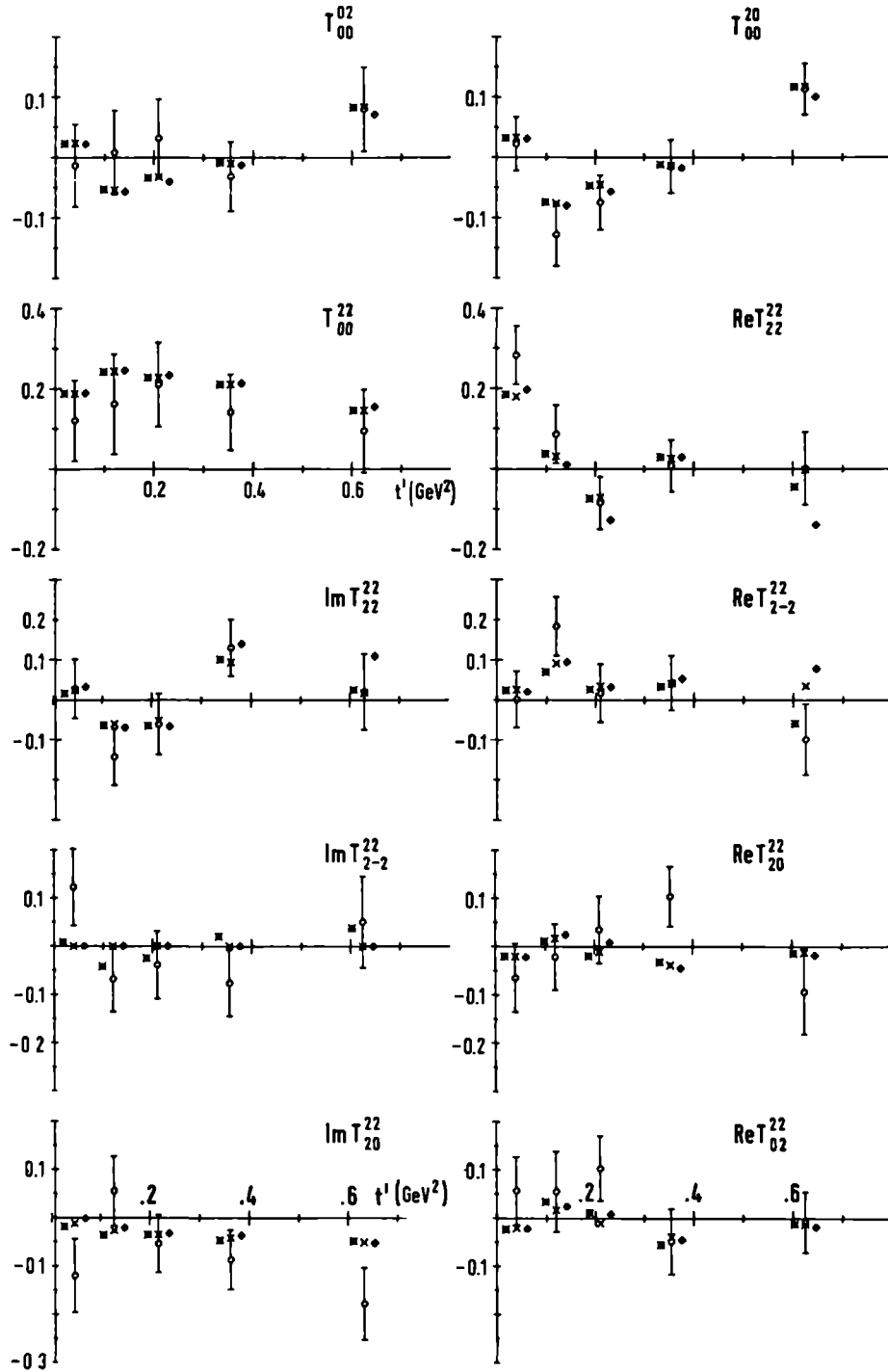


Fig.VI.2a. De experimentele waarden van de statistische tensoren voor de reactie $\Delta^{++}\omega$, bepaald in de verschillende t' -intervallen. Links (*), midden (x) en rechts (◊) hiervan, de in de tekst beschreven door aanpassing verkregen waarden.

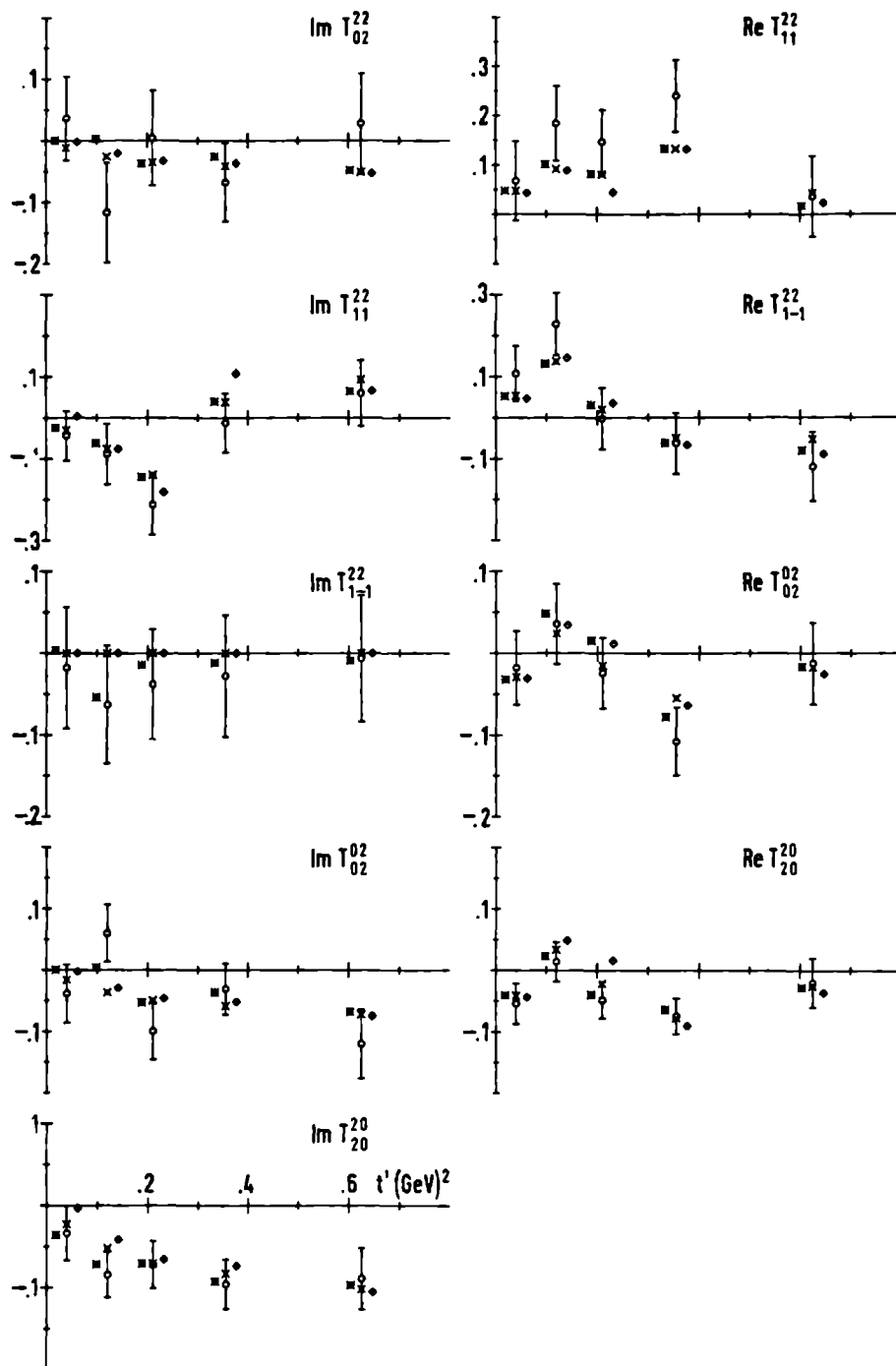


Fig.VI.2b. De experimentele waarden van de statistische tensoren voor de reactie $\Delta^{++} \omega^0$, bepaald in de verschillende t' -intervallen. Links (*), midden (x) en rechts (\diamond) hiervan, de in de tekst beschreven door aanpassing verkregen waarden.

de χ^2 -waarden en de waarschijnlijkheid van de diverse aanpassingen gegeven. Hieruit blijkt dat voor het "grote" interval het resultaat hetzelfde is als bij de klasse A-, B- en C-relaties. Voor $\Delta^{++\rho^0}$ wordt aan alle hypothesen voldaan, voor $\Delta^{++\omega^0}$ niet aan de hypothese $|f_7| = |f_8|$. In de deel intervallen verdwijnt evenwel het verschil tussen $\Delta^{++\rho^0}$ en $\Delta^{++\omega^0}$; hier wordt op gelijke wijze en met redelijk succes aan de verschillende hypothesen voldaan.

Het is moeilijk apriori uit te maken in hoeverre dit een gevolg is van de kleinere statistiek in de deel intervallen (waardoor de aanpassing eenvoudiger wordt) of een consequentie is van het feit dat het ongeoorloofd is te middelen over t' voor de reactie $\Delta^{++\omega^0}$. Enig inzicht hierin kan tabel VI.11 verschaffen. In deze tabel zijn de gemiddelde waarden van de statistische tensoren over het "grote" interval voor $\Delta^{++\rho^0}$ en $\Delta^{++\omega^0}$ gegeven en twee series berekende waarden. Deze berekende waarden volgen uit de kleinste kwadraten aanpassing met de voorwaarden $f_5 = f_6$ en $|f_7| = |f_8|$. De eerste serie berekende waarden (1) is verkregen uit de kleinste kwadraten aanpassing van de gemiddelde waarde van de statistische tensoren over het "grote" interval. De tweede serie berekende waarden (2) is het gemiddelde van de berekende waarden, die in de deel intervallen door kleinste kwadraten aanpassingen zijn bepaald.

Voor de reactie $\Delta^{++\rho^0}$ is er praktisch geen verschil tussen beide series berekende waarden. De grootste afwijking treedt op bij de tensor T_{22}^{22} ($= f_8 f_7^*$), die het meest gevoelig is voor rotaties van het assenstelsel. Het gebruik van de gemiddelde waarden van de statistische tensoren is dus geoorloofd om de amplituden te bepalen. De zo gevonden waarden zijn gegeven in tabel VI.12.

Voor de reactie $\Delta^{++\omega^0}$ is het verschil tussen beide series berekende waarden groot. De eerste serie (1) is niet in overeenstemming met de experimentele waarden. Uit tabel VI.9 was reeds bekend dat deze aanpassing met een $\chi^2 = 47,9$ zeer onwaarschijnlijk was. De tweede serie berekende waarden (2), die het gemiddelde is van de berekende waarden in de deel intervallen sluit met een $\chi^2 = 20,5$ (waarschijnlijkheid 10%) aanzienlijk beter aan bij de experimentele waarden. Opmerkelijk is verder

Tabel VI.11. Vergelijking tussen de experimentele waarden van de statistische tensoren en de gemiddelde berekende waarden (1) en (2) voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ ($0 \leq t' \leq 0,2 \text{ GeV}^2$) en $\Delta^{++}\omega^0$ ($0 \leq t' \leq 0,55 \text{ GeV}^2$).

Stat. Tensoren	$\Delta^{++}\rho^0$			$\Delta^{++}\omega^0$		
	Exp.Waarde	Berekende Waarde(1)	Berekende Waarde(2)	Exp.Waarde	Berekende Waarde(1)	Berekende Waarde(2)
T_{00}^{02}	$0,102 \pm 0,019$	0,107	0,107	$0,008 \pm 0,031$	-0,026	-0,022
T_{00}^{20}	$0,155 \pm 0,012$	0,152	0,151	$-0,043 \pm 0,022$	-0,036	-0,031
T_{00}^{22}	$0,107 \pm 0,027$	0,128	0,129	$0,171 \pm 0,050$	0,222	0,219
$\text{Re}T_{22}^{22}$	$0,140 \pm 0,027$	0,169	0,141	$0,053 \pm 0,034$	0,064	0,024
$\text{Im}T_{22}^{22}$	$0,087 \pm 0,027$	0,120	0,106	$-0,003 \pm 0,035$	0,063	0,013
$\text{Re}T_{2-2}^{22}$	$0,030 \pm 0,027$	0,073	0,070	$0,043 \pm 0,034$	0,096	0,041
$\text{Im}T_{2-2}^{22}$	$0,002 \pm 0,027$	0,0	0,0	$-0,013 \pm 0,035$	0,0	0,0
$\text{Re}T_{20}^{22}$	$-0,089 \pm 0,023$	-0,076	-0,075	$0,012 \pm 0,032$	-0,027	-0,010
$\text{Im}T_{20}^{22}$	$0,009 \pm 0,024$	-0,024	-0,024	$-0,055 \pm 0,032$	-0,011	-0,024
$\text{Re}T_{02}^{22}$	$-0,068 \pm 0,021$	-0,076	-0,075	$0,037 \pm 0,034$	-0,027	-0,010
$\text{Im}T_{02}^{22}$	$-0,027 \pm 0,022$	-0,024	-0,024	$-0,024 \pm 0,035$	-0,011	-0,024
$\text{Re}T_{11}^{22}$	$0,086 \pm 0,023$	0,083	0,069	$0,157 \pm 0,035$	0,101	0,078
$\text{Im}T_{11}^{22}$	$-0,001 \pm 0,020$	0,026	0,025	$-0,088 \pm 0,034$	0,042	-0,035
$\text{Re}T_{1-1}^{22}$	$-0,029 \pm 0,022$	-0,021	-0,021	$0,048 \pm 0,036$	0,050	0,035
$\text{Im}T_{1-1}^{22}$	$0,022 \pm 0,022$	0,0	0,0	$-0,038 \pm 0,034$	0,0	0,0
$\text{Re}T_{02}^{02}$	$-0,093 \pm 0,015$	-0,108	-0,106	$-0,030 \pm 0,021$	-0,038	-0,014
$\text{Im}T_{02}^{02}$	$-0,039 \pm 0,015$	-0,035	-0,034	$-0,042 \pm 0,022$	-0,016	-0,034
$\text{Re}T_{20}^{20}$	$-0,155 \pm 0,010$	-0,153	-0,150	$-0,040 \pm 0,015$	-0,054	-0,020
$\text{Im}T_{20}^{20}$	$-0,059 \pm 0,012$	-0,049	-0,048	$-0,070 \pm 0,014$	-0,022	-0,047
χ^2		13,4	11,9		47,9	20,5

Tabel VI.12. De quark-quark verstrooiingsamplituden voor de
reactie $\Delta^{++}\rho^0$, bepaald over het interval
 $0 \leq t' \leq 0,2 \text{ GeV}^2$.

Extra Ver- onderstell.	Absolute Waarde					Fase				
	f ₀	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	φ_0	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
-	0,69	0,38	0,28	0,99	0,41	-19°	24°	31°	0°	32°
f ₅ = f ₆	0,70	0,34	0,34	0,98	0,42	-21°	25°	25°	0°	32°
f ₅ =f ₆ én f ₇ = f ₈	0,72	0,42	0,42	0,71	0,71	-16°	54°	54°	0°	35°

dat bij de serie (2) de tensor T_{11}^{22} loodrecht staat op de tensoren T_{02}^{02} en T_{20}^{20} , zoals voor de experimentele waarden het geval is (cf. par. VI.f.2). Ook is de som $(T_{00}^{22} + \text{Re } T_{2-2}^{22} + |T_{22}^{22}|) = 0,28$ kleiner dan $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (cf. relatie C7). In elk deel interval moet deze som gelijk zijn aan $\frac{1}{\sqrt{6}}$, omdat $|f_7| = |f_8|$ is geëist. De tensor T_{00}^{22} is reëel evenals T_{2-2}^{22} (omdat $f_5 = f_6$ is). Hieruit volgt dat de snelle variatie van T_{22}^{22} over de verschillende t' intervallen er de oorzaak van moet zijn dat voor de gemiddelde berekende waarde van serie (2) de som kleiner is dan $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Deze snelle variatie van de amplituden is er ook de oorzaak van dat de gemiddelde waarde van de tensor T_{11}^{22} loodrecht staat op T_{02}^{02} en T_{20}^{20} , terwijl in elk deel-interval T_{11}^{22} parallel of antiparallel is met T_{02}^{02} en T_{20}^{20} .

De gevolgtrekking die men uit het voorafgaande kan maken is dat het niet zinvol is de gemiddelde amplituden voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$ te bepalen daar deze amplituden te snel variëren.

VI.g. Kinematische restricties.

Bij het beoordelen van het succes van het quarkmodel moet men er rekening mee houden dat veel relaties van de klasse A, B en C in de extreem voorwaartse richting ($\theta = 0$) triviaal worden. Voor sterk perifere reacties zoals $\Delta^{++}\rho^0$ beperkt dit de relevantie van deze

relaties t.a.v. de geldigheid van het quark model.

De kinematische restricties hebben de eenvoudigste vorm in het deeltjes helicitateitsstelsel, waar geldt dat in de extreem voorwaartse richting alle amplituden met $|\lambda - \mu| \neq 0$ moeten verdwijnen. Met behulp van de formules van de appendices A5 en A6 kan men alle stat. tensoren uitdrukken in de drie amplituden p , q en r (cf. par. IV.b.5), die in de voorwaartse richting van nul kunnen verschillen. Het blijkt dat alle imaginaire delen van de stat. tensoren in de voorwaartse richting verdwijnen zodat automatisch is voldaan aan de relaties A3, A5, B2, B4, B5, B6 en C1 t/m C6. Van de overblijvende relaties zijn de linker- en rechterleden, uitgedrukt in spin-dichtheidsmatrix elementen t.o.v. het helicitateitsstelsel, gegeven in tabel VI.13. Tevens is in kolom III

Tabel VI.13.

	linker lid	rechter lid	III
A1	$(\rho^{11}_{-p^{00}})$	$2(\rho_{33} - \rho_{11})$	$3 r ^2 = p ^2$
A2	$\sqrt{3} \operatorname{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}) - \frac{1}{2}(\rho_{33} - \rho_{11})$	$\frac{1}{2}(\rho^{11}_{-p^{00}})$	$\sqrt{3} \operatorname{Re}(pr^*) = p ^2$
A4	$\sqrt{3} \operatorname{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}) - \frac{1}{2}(\rho_{33} - \rho_{11})$	$(\rho_{33} - \rho_{11})$	volgt uit A1 en A2
A6	$3\sqrt{3} \operatorname{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}) + \frac{1}{2}(\rho_{33} - \rho_{11})$	$1 + (\rho_{33} - \rho_{11})$	$\sqrt{3} \operatorname{Re}(pr^*) = \frac{1}{6}(5 p ^2 + 3 r ^2)$
B1	linker lid A2	linker lid A4	identiek
B3	rechter lid A2	rechter lid A4	volgt uit A2 en A4
C7	$(\frac{1}{\sqrt{6}}(\rho_{33} - \rho_{11}) + \frac{2}{\sqrt{6}} \operatorname{Re}(\rho_{3-1}^{1-1}))$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$2\sqrt{3} \operatorname{Re}(pr^*) - p ^2 - 3 r ^2 = 0$

van deze tabel aangegeven aan welke voorwaarden de amplituden p en r moeten voldoen, opdat de relaties van klasse A, B en C geldig zijn, (d.m.v. de normeringseis $2(|p|^2 + |q|^2 + |r|^2) = 1$, is q hieruit geëlimineerd). Men ziet hieruit dat de eisen waaraan p en r moeten voldoen

zijn dat $|p| = \sqrt{3}|r|$ en dat p en r in fase moeten zijn. Daar bovendien bij de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ de amplitude q overheersend is en bijgevolg p en r klein zijn (cf. par. IV.b.5), is het duidelijk dat ongeacht de geldigheid van het quark-model in de extreem voorwaartse richting altijd aan diverse relaties wordt voldaan. Dit argument geldt in veel minder mate voor de $\Delta\omega$ -reactie, omdat daar de meetresultaten over een groter t -gebied gespreid liggen.

VI.h. Conclusie.

In het voorafgaande is gebleken dat de gemiddelde waarden van de statistische tensoren van beide reactie $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$ voldoen aan de klasse A en B relaties in de kinematisch bepaalde assenstelsels: het transversaal Jackson- en het transversaal helicititeits-systeem. De klasse C relaties gelden in deze assenstelsels niet. Voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ wordt aan deze laatste relaties wel voldaan in het transversaal Donohue-Högaasen systeem, welke assenstelsel dynamisch bepaald is.

Hieruit volgt dat de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ in overeenstemming is met het quark-model volgens Bialas en Zalewski. Door de kinematische restricties op de amplituden voor deze sterk perifere reactie wordt de relevantie van deze overeenstemming enigszins beperkt.

Dat de gemiddelde waarden van de statistische tensoren voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$ ook in het T.D.H.-systeem niet aan de klasse C relaties voldoen, houdt niet in dat deze reactie in strijd is met het quark-model. Door een analyse over kleinere t -intervallen blijkt namelijk dat ook voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$ de veronderstelling dat $|f_7| = |f_8|$ geldig is in ieder deel-interval. Voor deze reactie is het T.D.H.-systeem gewoon niet het meeste geschikte assenstelsel om de klasse C relaties te testen, aangezien de tensoren T_{02}^{02} en T_{20}^{20} hier nu niet veel signifikanter zijn dan de overige.

Referenties:

- 1) K. Kajantie and P.V. Ruuskanen, Nucl. Phys. B13 (1969), 437.
- 2) H.J. Lipkin and F. Scheck, Phys. Rev. Letters 16 (1966), 71.
- 3) J.J.J. Kokkedee and L. Van Hove, Nuovo Cimento 42 (1966), 711.
- 4) C. Itzykson and M. Jacob, Nuovo Cimento 48^A (1967), 909.
- 5) J.L. Friar and J.S. Trefil, Nuovo Cimento 49 (1967), 642.
- 6) A. Bialas and K. Zalewski, Nucl. Phys. B6 (1968), 465.
- 7) A. Kotanski and K. Zalewski, Nucl. Phys. B15 (1970), 242.
- 8) A. Bialas, A. Kotanski and K. Zalewski, Nucl. Phys. B28 (1971, 1).
- 9) J.J.J. Kokkedee, The Quark Model, Benjamin, New York (1969).
- 10) H.J. Lipkin, Phys. Rev. 183 (1969), 1221.
- 11) H.J. Lipkin, Nucl. Phys. B20 (1970), 652.
- 12) D. Horn, Phys. Rev. 150 (1966), 1228.
- 13) A. Kotanski, Acta Physica Polonica 30 (1966), 629.
- 14) A. Kotanski and K. Zalewski, Nucl. Phys. B12 (1969), 72.
- 15) A. Kotanski and K. Zalewski, Nucl. Phys. B13 (1969), 119.
- 16) Bonn-Durham-Nijmegen-Paris (E.P.)-Torino collaboratie
K. Böckmann et al., Physics Lett. 28B (1968), 72.

Summary.

A 5 GeV/c π^+ p bubble chamber experiment has been performed by a collaboration of five European laboratories (Bonn, Durham, Nijmegen, Paris (E.P.), Turin). Some 125,000 triplet pictures obtained from the British National Hydrogen Bubble Chamber were analysed.

Our thesis describes reactions with double resonance production. These reactions are mainly observed in channels with four charged particles in the final state.

The following reactions have been studied: $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\rho^0$ (or f^0) in the channel $p\pi^+\pi^-\pi^0$; $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\omega^0$ (or η^0) in the channel $p\pi^+\pi^-\pi^0$.

In the first two chapters cross-sections for the reaction channels and the double resonance production present in these channels are given. The latter ones are determined by fitting a distribution function to (parts of) the two-dimensional Goldhaber plots: ($p\pi^+$ vs. $\pi^+\pi^-$) and ($p\pi^+$ vs. $\pi^+\pi^-\pi^0$) resp.

Chapter III describes two methods to parametrise decay angular distributions using the joint-decay spin density matrix and the statistical tensors resp.

Chapter IV gives the differential cross-section of the double resonance production reactions and the decay-angular distribution of the resonances produced. For the joint decay distribution of the reactions $\Delta^{++}\rho^0$ and $\Delta^{++}\omega^0$ the parameters discussed in chapter III are derived. In the reaction $\Delta^{++}f^0$ it turned out to be impossible to determine the f^0 density matrix elements as a result of interference effects.

In the last two chapters the results obtained for the reactions $\Delta^{++}\rho^0$ and $\Delta^{++}\omega^0$ are compared with some theoretical models.

In Chapter V is shown that, at least for small values of t' , the absorption model predictions are in reasonable agreement with the experimental results for reaction $\Delta^{++}\rho^0$. The reaction $\Delta^{++}\omega^0$ on the other hand is not well described by this model.

The (combination of) spin density matrix elements $\sigma_0^- (= \rho^{00})$, $\sigma_1^- (= \rho^{11} - \rho^{1-1})$ and $\sigma_1^+ (= \rho^{11} + \rho^{1-1})$ of the reactions $\Delta^{++}\rho^0$ and $\Delta^{++}\omega^0$ are studied as a function of t' . For the reaction $\Delta^{++}\rho^0$ one

concludes that for small values of t' π -exchange dominates and that for $t' > 0,2 \text{ GeV}^2$ A_2 -exchange becomes important. For the same reaction a minimum is observed in the σ_0^- distribution near $t' \approx 0,7 \text{ GeV}^2$. The statistical significance is small however. From the relatively large value of σ_0^- in the reaction $\Delta^{++}\omega^0$, one deduces that "B"-exchange contribution plays a substantial rôle. The σ_0^- distribution shows a dip at $t' \approx 0,15 \text{ GeV}^2$. The " ρ "-exchange contribution becomes zero for $t' \approx 0,6 \text{ GeV}^2$, as expected on the basis of Regge-theory.

In Chapter VI the reactions $\Delta^{++}\rho^0$ and $\Delta^{++}\omega^0$ are compared with the quark model relations evaluated by Bialas and Zalewski. For both reactions the averaged values of the statistical tensors satisfy the so-called class A and B constraint relations. For the reaction $\Delta^{++}\rho^0$ the average values of the statistical tensors calculated in the transverse Donohue-Högaasen system, also satisfy the so called class C relations. This is not the case for the reaction $\Delta^{++}\omega^0$. Within the framework of the quark model this can be explained by the fact that the amplitudes of the reaction $\Delta^{++}\omega^0$ vary rapidly and that the transverse Donohue-Högaasen system is not the most suitable to test the class C relations.

Samenvatting.

Een 5 GeV/c π^+p bellenvat experiment is verricht door een collaboratie van vijf Europese bellenvatgroepen (Bonn, Durham, Nijmegen, Parijs (E.P.) en Turijn). Hiertoe zijn ongeveer 125.000 triplet foto's van het Britse Waterstof bellenvat geanalyseerd.

Dit proefschrift heeft betrekking op reacties met dubbel resonantie productie. Deze reacties worden voornamelijk waargenomen in de reactie kanalen met 4 geladen deeltjes in de eindtoestand.

Onderzocht zijn de reacties $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\rho^0$ (of f^0) in het kanaal $p\pi^+\pi^+\pi^-$ en de reactie $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\omega^0$ (of η^0) in het kanaal $p\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$.

In de eerste twee hoofdstukken wordt de werkzame doorsnede gegeven van de beide reactie kanalen en van de dubbel resonantie productie daarin. Deze laatste werkzame doorsneden zijn bepaald door aanpassing van een verdelingsfunctie aan de twee-dimensionale Goldhaber plots ($p\pi^+$ vs. $\pi^+\pi^-$) en ($p\pi^+$ vs. $\pi^+\pi^-\pi^0$).

Hfdst. III behandelt twee methoden om de vervalshoek verdelingen te parametriseren, gebruik makende van resp. de zg. (gecombineerde) spin-dichtheidsmatrix en de statistische tensoren.

In Hfdst. IV wordt de differentiële werkzame doorsnede van deze reacties gegeven, alsmede de vervalshoekverdelingen van de geproduceerde resonanties. Voor de gecombineerde vervalshoek-verdelingen van de reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$ worden de in Hfdst. III besproken parameters bepaald. Voor de reactie $\Delta^{++}f^0$ blijkt het niet mogelijk de f^0 -spin dichtheidsmatrix elementen te bepalen t.g.v. interferentie effecten.

In de laatste twee hoofdstukken worden de verkregen resultaten m.b.t. de reacties $\Delta^{++}\rho^0$, $\Delta^{++}\omega^0$ en $\Delta^{++}\eta^0$ vergeleken met enige theoretische modellen.

In Hfdst. V wordt aangetoond dat het absorptie model in redelijke overeenstemming is met de experimentele resultaten voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ bij kleine waarden van t' , maar niet voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$.

Voor de reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$ wordt het verloop van de (combinaties van) spin-dichtheidsmatrix elementen $\sigma_0^- = \rho^{00}$, $\sigma_1^- = (\rho^{11} - \rho^{1-1})$

en $\sigma_1^+ = (\rho^{11} + \rho^{1-1})$ in functie van t' onderzocht. Hieruit kan voor de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ worden geconcludeerd dat deze bij kleine waarden van t' voornamelijk door π -uitwisseling tot stand komt, en dat voor $t' > 0,2 \text{ GeV}^2$ A_2 uitwisseling belangrijk wordt. Voor dezelfde reactie wordt een minimum in de σ_0^- verdeling waargenomen rond $t' = 0,7 \text{ GeV}^2$. De statistische significantie is evenwel niet groot. Uit de betrekkelijk grote waarde van σ_0^- voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$, volgt dat "B"-uitwisseling een rol speelt. Bij $t' \approx 0,15 \text{ GeV}^2$ vertoont de σ_0^- verdeling een minimum. De " ρ "-uitwisselingsbijdrage σ_1^+ wordt ongeveer gelijk nul voor $t' \approx 0,6 \text{ GeV}^2$, zoals men op grond van het Regge pool-model verwacht.

In Hfdst. VI worden de reacties $\Delta^{++}\rho^0$ en $\Delta^{++}\omega^0$ vergeleken met de quark model relaties van Bialas en Zalewski. Voor beide reacties voldoen de gemiddelde waarden van de statistische tensoren aan de zg. klasse A en B relaties. De gemiddelde waarden van de statistische tensoren bepaald t.o.v. het transversaal Donohue-Högaasen systeem voldoen in het geval van de reactie $\Delta^{++}\rho^0$ wel, maar voor de reactie $\Delta^{++}\omega^0$ niet aan de zg. klasse C relaties. Binnen het raam van het quark model kan hiervoor een verklaring gevonden worden in het feit dat de amplituden van de reactie $\Delta^{++}\omega^0$ snel variëren en dat het transversaal Donohue-Högaasen systeem niet het meest geschikte assenstelsel is om de klasse C relaties te testen.

Appendices

A1. Resonantie-formules

In Hfdst. II worden om de verschillende resonanties weer te geven, faseruimte verdelingen met bepaalde gewichtsfactoren vermenigvuldigd. Voor alle resonanties, met uitzondering van de ω^0 , zijn de door Jackson^{*} voorgestelde relativistische Breit-Wigner formules gebruikt, d.w.z.

$$f_{B.W.}(m) = \frac{m}{q} \frac{\Gamma(m)}{(m_0^2 - m^2) + m_0^2 \Gamma^2(m)} \quad A1-1$$

met

$$\Gamma(m) = \Gamma_0 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{2l+1} \frac{R(m_0)}{R(m)}$$

Hierbij is m de effectieve massa van de twee deeltjes-resonantie en q de impuls van deze deeltjes in het rustsysteem van de resonantie. De index 0 duidt aan dat de betreffende grootte voor het centrum van de resonantie geldt.

Voor $\rho(l=1)$ en $f^0(l=2)$ is $R(m) = q_0^2 + q^2$,

en voor $\Delta^{++}(l=1)$ is $R(m) = A^2 + q^2$ gekozen.

De door ons gebruikte waarde van $A = 0,11$ GeV komt overeen met een interactie straal $\left(\frac{1}{A}\right)$ van $1,8 f_m$.

Het ω^0 meson is door een Gauss-kurve beschreven, d.w.z. door de uitdrukking:

$$f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-m_0}{\sigma}\right)^2} \quad A1-2$$

hierbij is σ de (halve) breedte van de ω^0 -resonantie en $m(m_0)$ zoals hoger vermeld.

^{*} J.D. Jackson, Nuovo Cimento 34 (1964), 1644.

A2. De Mandelstam variabelen

De kinematic van twee deeltjes reacties kan beschreven worden met de relativistisch invariante Mandelstam variabelen s en t . Deze zijn als volgt gedefinieerd:

$$s = (P_a + P_b)^2 = (P_c + P_d)^2$$

$$t = (P_a - P_c)^2 = (P_b - P_d)^2$$

(zie Fig. V-7).

Hierin zijn P_a, P_b de 4-impulsvectoren van de inkomende deeltjes en P_c, P_d de 4-impulsvectoren van de uitgaande deeltjes.

In het natuurlijk eenheden stelsel ($\hbar = c = 1$) worden impuls, massa en energie alle in MeV of GeV uitgedrukt, zodat de 4-vector $P_a = (E_a, \vec{p}_a)$.

Het inwendig product van de 4-vectoren P_a en P_b is gedefinieerd als

$$P_a \cdot P_b = E_a E_b - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b$$

De variabele \sqrt{s} is de CM energie en de variabele t is de 4-impuls overdracht. In het CM systeem ($\vec{p}_a = -\vec{p}_b$) geldt:

$$t = m_a^2 + m_c^2 - 2(E_a E_c - p_a p_c \cos \theta_p)$$

waarbij $p_a = |\vec{p}_a|$, $p_c = |\vec{p}_c|$ en θ_p = de CM. productie hoek.

De absolute waarde van t is minimaal voor $\theta_p = 0^\circ$; hieruit volgt dat:

$$t' = |t - t_{\min}| = 2 p_a p_c (1 - \cos \theta_p).$$

A3. t-Afhankelijkheid van de Effectieve Massa

De werkzame doorsnede van de meeste twee deeltjes reacties hebben een t-afhankelijkheid die bij benadering door één of een som van twee exponentiële functies kan worden benaderd, bv.:

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim e^{at} \quad \text{A3-1}$$

De grootheid t is afhankelijk van de productie hoek θ in het C.M. systeem, de massa en de impuls van de uitgaande deeltjes. De impuls ligt vast als de massa van de deeltjes bekend is. Daarom heeft een speciale t-afhankelijkheid van de werkzame doorsnede invloed op de diverse massa verdelingen. Is men alleen in de effectieve massa verdelingen geïnteresseerd dan kan deze afhankelijkheid in rekening brengen door de gewichtsfactor $g(m_c, m_d)$, die men verkrijgt uit form. A3-1 door te middelen over alle productie hoeken.

De gevonden gewichtsfactor is:

$$\begin{aligned} g(m_c, m_d) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{at} d \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} e^{at_{\min}} \int_{-1}^1 e^{-at'} d \cos \theta \\ &= \frac{e^{at_{\min}} (1 - e^{-4a p_a p_c})}{4 a p_a p_c} . \end{aligned} \quad \text{A3-2}$$

De notatie is dezelfde als in appendix A2. Bij een bepaalde impuls p_a van dat inkomende deeltje zijn t_{\min} en p_c alléén afhankelijk van de massa's van de uitgaande deeltjes m_c en m_d .

A4. Quark golffuncties

Uitgedrukt in de isospin- en spintoestand van de quarks p_{\pm} , n_{\pm} (p , n = isospin $+\frac{1}{2}$ resp. $-\frac{1}{2}$; p_{+} , p_{-} = spin projectie $+\frac{1}{2}$ resp. $-\frac{1}{2}$, etc.), luidt de golffunctie van een proton met spin projectie $+\frac{1}{2}$:

$$p_{+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} s [(n_{-}(1) p_{+}(2) p_{+}(3) + n_{-}(2) p_{+}(1) p_{+}(3) + n_{-}(3) p_{+}(1) p_{+}(2)) - \\ - \frac{1}{2} \{ n_{+}(1)(p_{+}(2)p_{-}(3) + p_{-}(2)p_{+}(3)) + n_{+}(2)(p_{+}(1)p_{-}(3) + p_{+}(3)p_{-}(1)) \\ + n_{+}(3)(p_{+}(1)p_{-}(2) + p_{-}(1)p_{+}(2)) \}] .$$

Hierbij dient $s = +1$ genomen te worden.

De golffunctie van $p_{-\frac{1}{2}}$ verkrijgt men door bovenstaande uitdrukking $s = -1$ te stellen en de spintoestand van alle quarks om te keren. De Δ^{++} quark golffuncties kunnen op analoge wijze geschreven worden als:

$$\Delta_{\frac{3}{2}}^{++} = p_{+}(1) p_{+}(2) p_{+}(3) \\ \Delta_{\frac{1}{2}}^{++} = \frac{1}{\sqrt{3}} (p_{-}(1)p_{+}(2)p_{+}(3) + p_{+}(1)p_{-}(2)p_{+}(3) + p_{+}(1)p_{+}(2)p_{-}(3)) \\ \left. \begin{aligned} \Delta_{-\frac{1}{2}}^{++} &= \Delta_{\frac{1}{2}}^{++} \\ \Delta_{-\frac{3}{2}}^{++} &= \Delta_{\frac{3}{2}}^{++} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{met } p_{+} \rightarrow p_{-} \\ &\text{en } p_{-} \rightarrow p_{+} \end{aligned}$$

De meson golffuncties zijn:

$$\pi^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{+}\bar{n}_{-} - p_{-}\bar{n}_{+}) \\ V_1^0 = \frac{p_{+}\bar{p}_{+} + s(n_{+}\bar{n}_{+})}{\sqrt{2}} \\ V_0^0 = \frac{p_{+}\bar{p}_{-} + n_{-}\bar{n}_{+} + s(p_{-}\bar{p}_{+} + n_{+}\bar{n}_{-})}{2} \\ V_{-1}^0 = \frac{p_{-}\bar{p}_{-} + s(n_{-}\bar{n}_{-})}{\sqrt{2}}$$

waarbij V_0 de vector meson golffunctie is voor $\rho^0(s = +1)$ en $\omega^0(s = -1)$ resp.

A5. Verband tussen statistische tensoren en spin dichtheidsmatrix elementen

$$T_{00}^{02} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\rho_{33} - \rho_{11} - \rho_{-1-1} + \rho_{-3-3})$$

$$T_{00}^{20} = \frac{1}{2\sqrt{6}} (\rho^{11} - 2\rho^{00} + \rho^{-1-1})$$

$$T_{00}^{22} = \frac{1}{2\sqrt{6}} (\rho^{11} - 2\rho^{00} + \rho^{-1-1})$$

$$T_{22}^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_{-13}^{-11} + \rho_{-31}^{-11})$$

$$T_{2-2}^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_{3-1}^{-11} + \rho_{1-3}^{-11})$$

$$T_{20}^{22} = \frac{1}{2} (\rho_{-13}^{-11})$$

$$T_{02}^{22} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\rho_{-13}^{-11} + \rho_{-31}^{-11})$$

$$T_{11}^{22} = \frac{1}{2} (\rho_{-3-1}^{-10} - \rho_{13}^{-10} + \rho_{13}^{01} - \rho_{-3-1}^{01})$$

$$T_{1-1}^{22} = \frac{1}{2} (\rho_{31}^{-10} - \rho_{-1-3}^{-10} + \rho_{-1-3}^{01} - \rho_{31}^{01})$$

$$T_{02}^{02} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\rho_{-13} + \rho_{-31})$$

$$T_{20}^{20} = \frac{1}{2} \rho^{-11}$$

$$T_{01}^{02} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re} (\rho_{31})$$

$$T_{10}^{20} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} (\rho^{10})$$

$$T_{21}^{22} = -\sqrt{2} \operatorname{Re} (\rho_{13}^{-11})$$

$$T_{2-1}^{22} = \sqrt{2} \operatorname{Re} (\rho_{31}^{-11})$$

$$T_{10}^{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} (\rho_{13}^{10})$$

$$T_{12}^{22} = \operatorname{Re} (\rho_{-31}^{-10} + \rho_{-13}^{-10})$$

$$T_{1-2}^{22} = \operatorname{Re} (\rho_{3-1}^{-10} + \rho_{1-3}^{-10})$$

$$T_{01}^{22} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \operatorname{Re} \rho_{13}$$

A6. Transformatie formules voor statistische tensoren

Onderstaande formules geven het verband tussen de statistische tensoren in het transversaal Jackson systeem en het (normale) Jackson systeem.

$$T_{00}^{20} = -\frac{1}{2} (T_{00}^{20} + \sqrt{6} T_{20}^{20})$$

$$T_{00}^{22} = \frac{1}{4} (T_{00}^{22} + \sqrt{6} (T_{20}^{22} + T_{02}^{22}) + 3 (T_{22}^{22} + T_{2-2}^{22}))$$

$$\text{Re } T_{2\pm 2}^{22} = \frac{1}{8} [3 T_{00}^{22} + T_{22}^{22} + T_{2-2}^{22} - \sqrt{6} (T_{02}^{22} + T_{20}^{22}) \pm \frac{1}{2} (T_{1-1}^{22} - T_{11}^{22})]$$

$$\text{Im } T_{2\pm 2}^{22} = \frac{1}{4} i [-\sqrt{6} T_{01}^{22} + T_{1-2}^{22} + T_{12}^{22} \pm (\sqrt{6} T_{10}^{22} - T_{2-1}^{22} + T_{21}^{22})]$$

$$\text{Re } T_{1\pm 1}^{22} = \frac{1}{2} [T_{22}^{22} - T_{2-2}^{22} \mp (T_{11}^{22} + T_{1-1}^{22})]$$

$$\text{Im } T_{1\pm 1}^{22} = \frac{1}{2} i [T_{12}^{22} - T_{1-2}^{22} \pm (T_{21}^{22} + T_{2-1}^{22})]$$

$$\text{Re } T_{20}^{22} = \frac{1}{8} [\sqrt{6} (T_{22}^{22} + T_{2-2}^{22} - T_{00}^{22}) + 2 T_{02}^{22} - 6 T_{20}^{22}]$$

$$\text{Im } T_{20}^{22} = \frac{1}{4} i [2 T_{01}^{22} - \sqrt{6} (T_{2-1}^{22} - T_{21}^{22})]$$

$$\text{Re } T_{20}^{20} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} T_{00}^{20} - 2 T_{20}^{20})$$

$$\text{Im } T_{20}^{20} = -i T_{10}^{20}$$

De relaties voor T_{00}^{02} , T_{02}^{22} en T_{02}^{02} vindt men uit die voor T_{00}^{20} , T_{20}^{22} en T_{20}^{20} door verwisseling van de indices.

STELLINGEN

1. Voor reacties met drie deeltjes in de eindtoestand biedt de prisma-plot-analyse geen voordelen boven de Dalitz-plot-analyse. J.E. Brau et al. Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 1481.
2. De veronderstelling van Bialas en Zalewski dat men in een spin-analyse door een aangepaste keuze van de quantisatie-as, de experimentele fouten op bepaalde spindichtheidsmatrix-elementen of statistische tensoren zou kunnen verkleinen, is niet juist. A. Bialas en K. Zalewski, Phys. Lett. 26^B (1968) 170.
3. De door Bloodworth et al. gebruikte veronderstellingen om de werkzame doorsnede van het twee-deeltjes proces $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\omega^0$ te bepalen, zijn in tegenspraak met de allereerste conclusie die uit het bestaan van deze reactie zelf volgt, nl. dat er een correlatie bestaat tussen de Δ^{++} en ω -productie. I.J. Bloodworth et al. Nucl. Phys. B35 (1971) 79.
4. Een van de meest geschikte reacties om het bestaan van exotische mesonen te onderzoeken is de reactie $\bar{p}p \rightarrow p\bar{p}(m\pi)$.
5. Eindtoestanden van meson-combinaties met totale lading 0 of ± 1 , kunnen zeer wel meer geschikt zijn om exotische deeltjes op te sporen dan de meer onderzochte toestanden met totale lading ± 2 .
6. Vanuit het oogpunt van de studie van de hadron-fysica is het laten groeien van de dimensies van bellenvaten met de energie van de invallende bundel een niet optimale ontwikkeling.
7. In het door CERN gestimuleerde en gecoördineerde onderzoek m.b.v. visuele detectors wordt onvoldoende aandacht besteed aan het gebruik van "streamer chambers".

